

Principe de Fermat et ses applications

Notes de cours — préparation à l'agrégation de physique

Rémi Mevaere — sciences-physiques.net

Niveau	Licence (L2–L3). Les lois de Snell–Descartes, la notion d'indice et l'ordre de grandeur de la diffraction sont supposés connus (première année) ; la leçon en donne une reconstruction à partir d'un principe unique.
Prérequis	Équations de Maxwell dans un milieu linéaire, homogène et isotrope ; onde plane monochromatique, vecteur d'onde et vecteur de Poynting ; lois de Snell–Descartes ; gradient, base de Frenet, notion de dérivée d'une intégrale par rapport à un paramètre.
Bibliographie	J.-P. PÉREZ, <i>Optique : fondements et applications</i> , Dunod, 7 ^e éd., chap. 1–2 ; E. HECHT, <i>Optics</i> , Pearson, 5 ^e éd., §4.5 et §5.2 ; M. BORN et E. WOLF, <i>Principles of Optics</i> , Cambridge UP, chap. 3 et app. I ; R. FEYNMAN, <i>Cours de physique</i> , Mécanique 2, chap. 26–27, et <i>Lumière et matière</i> ; SEXTANT, <i>Optique expérimentale</i> , Hermann ; R. DUFFAIT, <i>Expériences d'optique à l'agrégation</i> , Bréal ; L. LANDAU et E. LIFCHITZ, <i>Théorie des champs</i> §53–54 et <i>Mécanique</i> §44.

⚠ Avertissement

Ce document reprend mes **notes de cours personnelles** rédigées pour la préparation à l'agrégation de physique. Il peut servir de support de travail, mais il doit **impérativement être retravaillé** par chaque candidat : le plan, le niveau, les démonstrations et les expériences sont à adapter à sa propre leçon et au programme en vigueur. Malgré le soin apporté à la relecture, une erreur reste possible.

Plan minuté

Partie	Durée	Point fort
Introduction : de Héron à Foucault	3 min	accroche historique, problématique
I. Du modèle ondulatoire au rayon lumineux	7 min	critère $\sin \theta \gtrsim \lambda/D$, chemin optique
II. Le principe de Fermat	10 min	énoncé, <i>stationnaire</i> $\neq$ minimal, sauveteur en mer
III. Milieux homogènes par morceaux	9 min	Snell–Descartes démontrées, stigmatisme, Malus–Dupin
IV. Milieux inhomogènes	9 min	équation des rayons, mirages, fibre, réfraction atmosphérique
Conclusion : l'analogie optico-mécanique	2 min	Maupertuis, de Broglie, Feynman

Introduction

Depuis l'Antiquité, on sait que la lumière se propage en ligne droite dans l'air et que le rayon réfléchi par un miroir fait avec la normale le même angle que le rayon incident. Héron d'Alexandrie (I^{er} siècle) remarque déjà que cette loi de la réflexion découle d'une exigence géométrique : parmi tous les chemins brisés joignant deux points via le miroir, la lumière emprunte *le plus court*. La loi de la réfraction, plus difficile, est établie expérimentalement par Snell (1621) et publiée par Descartes (1637, *La Dioptrique*) avec une « démonstration » mécanique qui suppose la lumière *plus rapide* dans l'eau que dans l'air.

En 1657, Pierre de Fermat propose une idée radicalement différente : la lumière suit le chemin de *moindre temps*. Il en déduit en 1662 la loi de Snell–Descartes, à condition d'admettre que la lumière est *plus lente* dans

les milieux denses. Deux siècles plus tard (1850), Foucault mesure directement la vitesse de la lumière dans l'eau : elle y est inférieure à celle dans l'air. Fermat avait raison.

Le principe de Fermat est ainsi le premier principe variationnel de la physique : une loi qui ne dit pas « comment la lumière avance pas à pas », mais quel trajet global elle emprunte. Nous allons préciser ce qu'il énonce exactement (stationnarité et non minimum), en déduire toute l'optique géométrique des milieux homogènes et inhomogènes, et montrer qu'il est lui-même une conséquence des équations de Maxwell dans la limite des courtes longueurs d'onde.

I Du modèle ondulatoire au rayon lumineux

1 Milieu de propagation et indice optique

On considère un milieu matériel **linéaire** (la polarisation $\vec{P}$ est proportionnelle au champ : $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$, d'où $\vec{D} = \epsilon_0(1 + \chi)\vec{E}$), **homogène** par morceaux ou lentement variable, **isotrope** (χ est un scalaire : $\vec{P}$ et $\vec{E}$ sont colinéaires) et **transparent** dans la bande spectrale considérée (χ réel : pas d'absorption). Les équations de Maxwell y admettent des solutions en ondes planes monochromatiques dont la vitesse de phase vaut $v_\phi = c/\sqrt{1 + \chi}$.

Définition — Indice optique

L'indice optique du milieu est le rapport de la vitesse de la lumière dans le vide à la vitesse de phase de l'onde monochromatique dans le milieu :

$$n(\omega) = \frac{c}{v_\phi(\omega)} = \sqrt{1 + \chi(\omega)} \geq 1, \quad c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ (valeur exacte).}$$

L'indice dépend de la pulsation : c'est la *dispersion* (loi de Cauchy $n = A + B/\lambda^2$ dans le visible pour les verres). L'inégalité $n \geq 1$ vaut pour les diélectriques transparents usuels dans le visible ; elle n'est pas générale ($n < 1$ pour les rayons X, ou au voisinage d'une résonance d'absorption).

Ordres de grandeur — indices à 589 nm

Milieu	n	Milieu	n
air (0 °C, 1 013 hPa)	1,000 29	PMMA (plexiglas)	1,49
eau	1,333	verre crown (BK7)	1,517
éthanol	1,361	verre flint	1,6 à 1,75
silice (fibres)	1,458	diamant	2,417

Pour l'air, la grandeur pertinente est l'écart $n - 1 \approx 2,9 \times 10^{-4}$, proportionnel à la masse volumique (loi de Gladstone) : il pilote toute la réfraction atmosphérique.

Attention

c est la vitesse de la lumière dans le vide, constante fondamentale fixée par la définition du mètre ; l'appellation « constante d'Einstein » désigne usuellement une autre grandeur ($\kappa = 8\pi G/c^4$, en relativité générale) et doit être évitée.

2 Le rayon lumineux et sa limite de validité

Une onde plane est une idéalisation d'extension infinie. Dès qu'on la limite transversalement, par une fente de largeur D , elle diverge : c'est la diffraction. Le spectre spatial d'une fonction d'extension $\Delta x \sim D$ a une largeur $\Delta k_x \gtrsim 2\pi/D$ (relation de Fourier) ; or $\sin \theta = \Delta k_x/k_0$ avec $k_0 = 2\pi/\lambda$, d'où le demi-angle du cône de diffraction (figure 1) :

$$\sin \theta \gtrsim \frac{\lambda}{D}$$

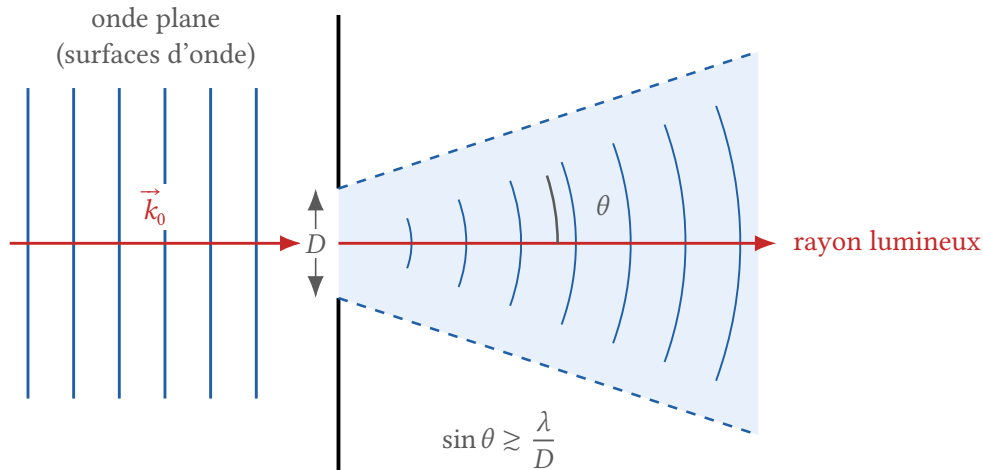


Fig. 1. Diffraction par une fente de largeur D et notion de rayon lumineux : le rayon est la ligne droite de direction $\vec{k}_0$ que suit l'énergie lorsque la diffraction est négligeable.

Définition – Rayon lumineux

Dans la limite $\lambda/D \rightarrow 0$ (longueur d'onde négligeable devant toute dimension des obstacles et des inhomogénéités du milieu), l'énergie lumineuse se propage le long de courbes appelées *rayons lumineux* : ce sont les lignes de champ du vecteur de Poynting moyen $\langle \vec{\Pi} \rangle$. Dans un milieu isotrope, le rayon est en tout point colinéaire au vecteur d'onde local $\vec{k}$, donc perpendiculaire aux surfaces d'onde.

Remarque.

- Le rayon est un objet géométrique (une courbe), non un pinceau de lumière : un faisceau laser contient une infinité de rayons. Le modèle ne dit rien de l'intensité, de la polarisation ni des interférences ; il décrit seulement où va l'énergie.
- Ce qui se propage à la vitesse c/n est la phase de l'onde monochromatique ; l'énergie se propage à la vitesse de groupe, égale à c/n seulement si le milieu est non dispersif.
- Dans un milieu anisotrope (cristal biréfringent), rayon et vecteur d'onde ne sont plus colinéaires : la leçon se limite aux milieux isotropes.

Exemple – portée du modèle

Faisceau laser de diamètre $D = 1 \text{ mm}$ à $\lambda = 633 \text{ nm}$: $\theta \simeq \lambda/D \simeq 0,6 \text{ mrad}$. Après 10 m, le faisceau s'est élargi de l'ordre du centimètre (rayon accru de $\theta \times 10 \text{ m} \simeq 6 \text{ mm}$) : sur une table d'optique ($\sim 1 \text{ m}$), le rayon rectiligne est une excellente description ; sur 1 km, il ne l'est plus.

3 Chemin optique

Le long d'un rayon, la phase progresse à la vitesse $v = c/n$. Parcourir l'élément ds prend le temps $dt = ds/v = n ds/c$; pour aller de A à B le long d'une courbe $\mathcal{C}$,

$$\Delta t = \frac{1}{c} \int_{\mathcal{C}} n ds.$$

Définition – Chemin optique

Le chemin optique le long de la courbe $\mathcal{C}$ joignant A à B est

$$L_{\mathcal{C}}(AB) = \int_{\mathcal{C}} n ds = c \Delta t.$$

C'est une longueur : la distance que la lumière aurait parcourue *dans le vide* pendant la même durée. Dans un milieu homogène, $L = n \times$ longueur géométrique.

Propriété – chemin optique et phase

Pour une onde monochromatique, le déphasage entre A et B le long d'un rayon vaut $\varphi_B - \varphi_A = \frac{2\pi}{\lambda_0} L(AB) = k_0 L(AB)$, où λ_0 est la longueur d'onde dans le vide. Les *surfaces d'onde* issues d'une source ponctuelle S sont les surfaces d'égal chemin optique $L(SM) = \text{cte}$.

Exemple

Traverser 1 m d'eau coûte $\Delta t = n\ell/c = 4,4 \text{ ns}$, soit un chemin optique $L = 1,33 \text{ m}$; une lame de verre de 1 mm ($n = 1,5$) introduit un retard de 0,5 mm de chemin optique, soit environ 800 longueurs d'onde dans le visible : c'est la grandeur que mesurent les interféromètres.

Nous avons le vocabulaire : *rayon*, *indice*, *chemin optique*. Quel principe sélectionne, parmi toutes les courbes joignant A à B , celle que suit effectivement la lumière ?

II Le principe de Fermat

1 Énoncé

Repère historique

Dans sa lettre à Cureau de la Chambre (août 1657), Fermat écrit que « la nature agit toujours par les voies les plus courtes et les plus simples » et propose que la lumière suive le trajet de *moindre temps*. Sa *Synthèse pour les réfractions* (1662) en déduit la loi des sinus. L'énoncé moderne, en termes de *stationnarité*, est dû aux travaux de Hamilton (1828–1837) sur les systèmes de rayons.

Théorème – Principe de Fermat

Entre deux points A et B atteints par la lumière, le trajet effectivement suivi est celui le long duquel le chemin optique est **stationnaire** : pour toute déformation infinitésimale du trajet laissant A et B fixes, la variation du chemin optique est nulle au premier ordre,

$$\boxed{\delta L = L_{\mathcal{C}'} - L_{\mathcal{C}} = 0 \text{ au premier ordre en } \delta \vec{M}} \quad \text{soit} \quad \delta \int_A^B n \, ds = 0.$$

Le temps de parcours étant L/c , cela revient à dire que la *durée* du trajet est stationnaire.

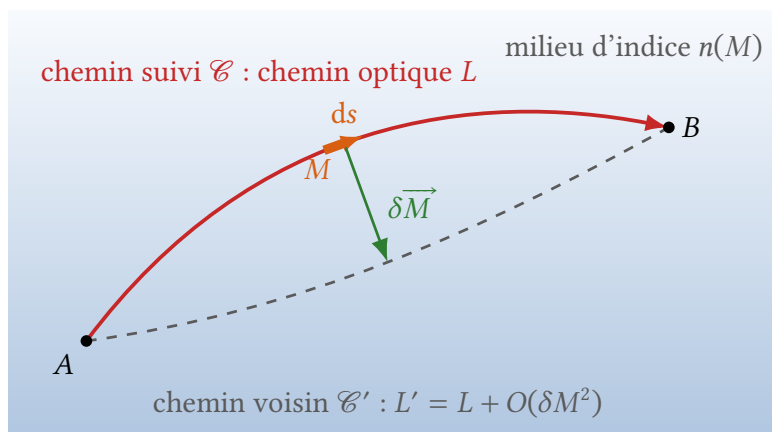
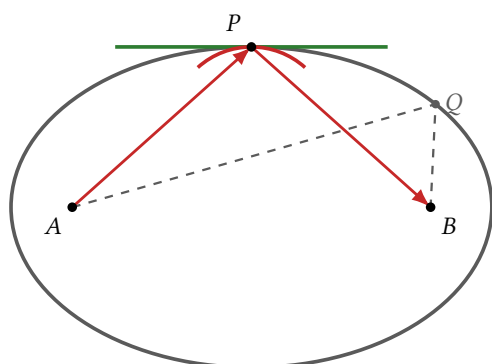


FIG. 2. Trajet réel $\mathcal{C}$ et trajet voisin $\mathcal{C}'$ obtenu en déplaçant chaque point de $\delta \vec{M}$: $L' - L$ est un infiniment petit du second ordre.

2 Stationnaire, pas nécessairement minimal

Attention – erreur fréquente

Le principe de Fermat n'affirme *pas* que la lumière suit le chemin le plus court ni le plus rapide. Le chemin effectif est un point critique de la fonctionnelle L : minimum dans les cas les plus courants, mais aussi parfois maximum ou simple point selle.



- miroir plan : L **minimal** en P
- miroir elliptique : L **constant**
- miroir plus courbé : L **maximal** en P

Dans les trois cas, $\delta L = 0$: le chemin APB est stationnaire.

ellipse de foyers A et B : $AQ + QB = 2a$ pour tout Q

Fig. 3. Trois miroirs tangents en P : pour le miroir elliptique de foyers A et B , tous les chemins AQB ont la même longueur $2a$; un miroir moins courbé (plan) rend APB minimal, un miroir plus courbé le rend maximal.

Démonstration – le miroir elliptique

Soit un miroir ayant la forme d'une ellipse de foyers A et B et de grand axe $2a$: pour tout point Q du miroir, $AQ + QB = 2a$. Tous les chemins AQB sont donc stationnaires (ils ont tous la même longueur), et tout point de l'ellipse réfléchit effectivement A sur B . Remplaçons maintenant le miroir par une surface tangente à l'ellipse en P :

- si elle est *moins courbée* que l'ellipse (par exemple le plan tangent), ses points $Q \neq P$ sont à l'extérieur de l'ellipse, donc $AQ + QB > 2a = AP + PB$: le chemin APB est un **minimum** ;
- si elle est *plus courbée*, ses points sont à l'intérieur, $AQ + QB < 2a$: le chemin APB est un **maximum**.

Dans les trois cas, le rayon réfléchi en P est le même : seule compte l'annulation de δL .

3 Premières conséquences

Propriété – Milieu homogène : propagation rectiligne

Si n est uniforme, $L = n\ell$ où ℓ est la longueur de la courbe. La longueur est stationnaire (et minimale) pour le segment de droite : dans un milieu homogène, les rayons sont des droites.

Propriété – Retour inverse de la lumière

Le chemin optique ne dépend pas du sens de parcours, $L(AB) = L(BA)$: si la lumière va de A à B par un trajet, elle va de B à A par le même trajet parcouru en sens inverse.

Remarque. Le retour inverse suppose un milieu *réciroque*. Dans un milieu magnéto-optique soumis à un champ magnétique (effet Faraday), l'indice des ondes circulaires dépend du sens de propagation : c'est le principe des isolateurs optiques, qui violent le retour inverse.

4 Une analogie : le sauveteur en mer

Un sauveteur S sur la plage doit atteindre un nageur N en difficulté (figure 4). Il court à $v_1 = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ sur le sable et nage à $v_2 = 1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. La ligne droite n'est pas le chemin le plus rapide : il vaut mieux courir

davantage et nager moins. La durée du trajet passant par le point $I(x)$ du rivage est

$$t(x) = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}}{v_2}, \quad \frac{dt}{dx} = \frac{\sin \theta_1}{v_1} - \frac{\sin \theta_2}{v_2} = 0 \iff \frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2}.$$

Avec $v_i = c/n_i$, c'est exactement la loi de Snell–Descartes $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$.

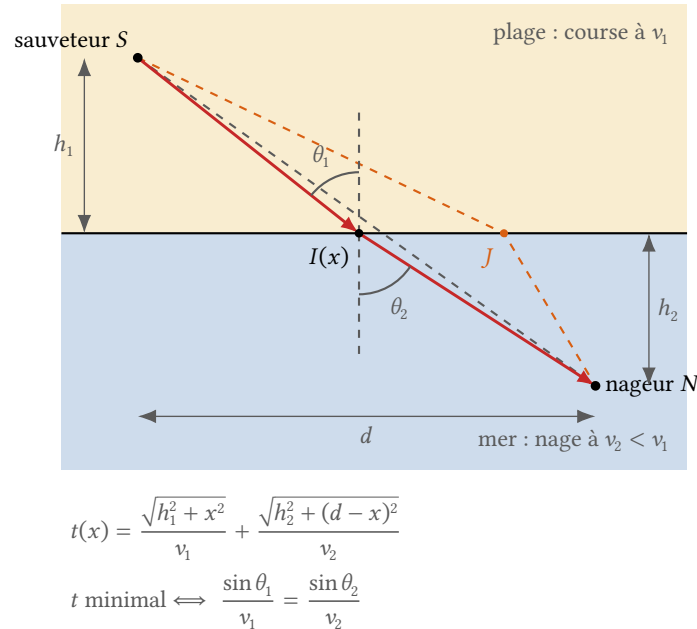


Fig. 4. Le sauveteur en mer : le chemin le plus rapide est une ligne brisée qui obéit à la loi des sinus.

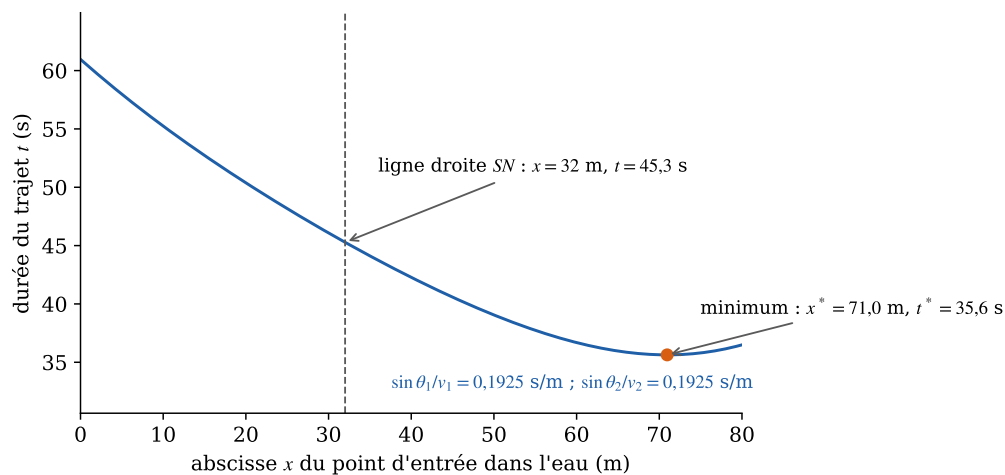


Fig. 5. Durée du trajet en fonction du point d'entrée dans l'eau pour $h_1 = 20$ m, $h_2 = 30$ m, $d = 80$ m : le minimum ($x^* = 71$ m) vérifie $\sin \theta_1/v_1 = \sin \theta_2/v_2$, à comparer à la ligne droite ($x = 32$ m, dix secondes de plus).

Listing 1. Minimisation numérique de la durée du trajet (SciPy).

```

1 import numpy as np
2 from scipy.optimize import minimize_scalar
3
4 h1, h2, d = 20.0, 30.0, 80.0 # distances en m
5 v1, v2 = 5.0, 1.5           # vitesses : course, nage (m/s)
6
7 def temps(x):

```

```

8      """Durée du trajet S -> I(x) -> N."""
9      return np.sqrt(h1**2 + x**2) / v1 + np.sqrt(h2**2 + (d - x)**2) / v2
10
11 res = minimize_scalar(temps, bounds=(0, d), method="bounded")
12 x_opt = res.x
13 sin1 = x_opt / np.sqrt(h1**2 + x_opt**2)          # sin(theta_1)
14 sin2 = (d - x_opt) / np.sqrt(h2**2 + (d - x_opt)**2) # sin(theta_2)
15 print(f"x* = {x_opt:.1f} m, t* = {res.fun:.1f} s")    # 71.0 m, 35.6 s
16 print(f"{sin1/v1:.4f} = {sin2/v2:.4f}")              # 0.1925 = 0.1925

```

Point agrégation — « Comment la lumière sait-elle quel chemin prendre? »

Elle ne le sait pas : tous les chemins sont « explorés ». Dans la description ondulatoire (Huygens–Fresnel), l'amplitude en B est la somme des contributions e^{ik_0L} de tous les trajets. Lorsque $\lambda_0 \rightarrow 0$, la phase k_0L varie très vite d'un trajet à l'autre et les contributions s'annulent par interférence destructive, *sauf* au voisinage du trajet où L est stationnaire : là, les phases sont presque égales et s'ajoutent. Le principe de Fermat est un théorème de *phase stationnaire* ; c'est l'argument popularisé par Feynman dans *Lumière et matière*, et il explique pourquoi seule la stationnarité compte, non le minimum.

Appliquons le principe à la situation la plus simple après le milieu homogène : deux milieux homogènes séparés par une surface.

III Milieux homogènes par morceaux

1 Variation du chemin optique d'un segment

Propriété

Dans un milieu homogène d'indice n , le chemin optique du segment AB est $L = n AB = n \vec{u} \cdot \vec{AB}$, où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire de A vers B . Lorsque les extrémités se déplacent de $d\vec{A}$ et $d\vec{B}$,

$$dL = n \vec{u} \cdot (d\vec{B} - d\vec{A})$$

Démonstration

$dL = n d(\vec{u} \cdot \vec{AB}) = n \vec{AB} \cdot d\vec{u} + n \vec{u} \cdot d\vec{AB}$. Or $\vec{AB} = AB \vec{u}$ et $\vec{u} \cdot \vec{u} = 1$ entraîne $\vec{u} \cdot d\vec{u} = 0$: le premier terme est nul. Reste $dL = n \vec{u} \cdot (d\vec{B} - d\vec{A})$. Seule la composante du déplacement *le long du rayon* modifie le chemin optique au premier ordre.

2 Loïs de Snell–Descartes

Soient deux milieux homogènes d'indices n_1 et n_2 séparés par une surface Σ (dioptré), de normale $\vec{N}$ au point I (figure 6). Le trajet A_1IA_2 a pour chemin optique

$$L = n_1 A_1I + n_2 IA_2.$$

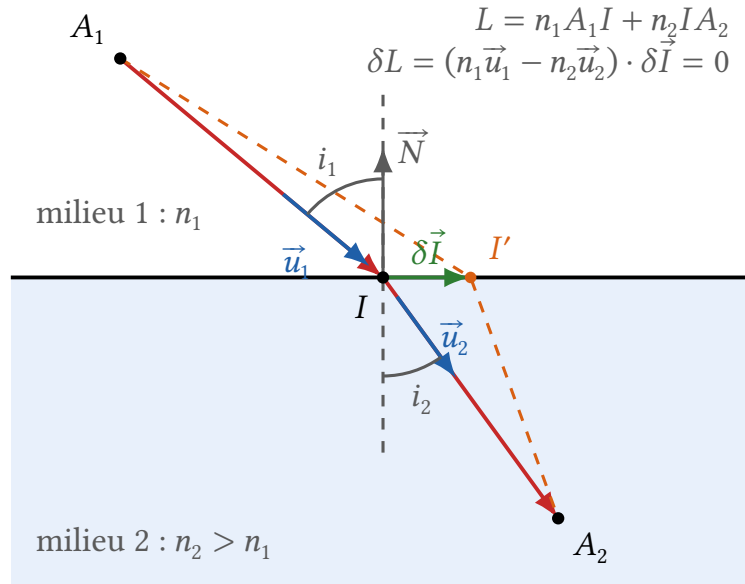


Fig. 6. Réfraction : le point d'incidence I est déplacé de $\delta \vec{I}$ dans le dioptre ; la stationnarité de L impose $n_2 \vec{u}_2 - n_1 \vec{u}_1 \parallel \vec{N}$.

Démonstration

Déplaçons le point d'incidence de $\delta \vec{I}$ tangent à Σ , A_1 et A_2 restant fixes. D'après la propriété précédente ($d\vec{A} = \vec{0}$, $d\vec{B} = \delta \vec{I}$ pour le premier segment ; $d\vec{A} = \delta \vec{I}$, $d\vec{B} = \vec{0}$ pour le second) :

$$\delta L = n_1 \vec{u}_1 \cdot \delta \vec{I} - n_2 \vec{u}_2 \cdot \delta \vec{I} = (n_1 \vec{u}_1 - n_2 \vec{u}_2) \cdot \delta \vec{I}.$$

Le principe de Fermat impose $\delta L = 0$ pour *tout* $\delta \vec{I}$ du plan tangent : le vecteur $n_2 \vec{u}_2 - n_1 \vec{u}_1$ est orthogonal au plan tangent, donc colinéaire à la normale :

$$\boxed{n_2 \vec{u}_2 - n_1 \vec{u}_1 = a \vec{N}} \quad (a \in \mathbb{R}).$$

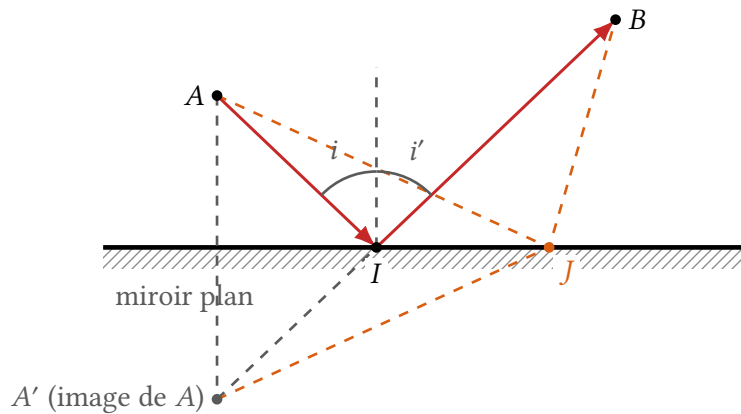
Théorème — Lois de Snell–Descartes pour la réfraction

1. $\vec{u}_2 = \frac{1}{n_2}(n_1 \vec{u}_1 + a \vec{N})$: le rayon réfracté est dans le plan d'incidence $(\vec{u}_1, \vec{N})$.
2. En prenant le produit vectoriel par $\vec{N}$: $n_2 \vec{N} \times \vec{u}_2 = n_1 \vec{N} \times \vec{u}_1$, soit, avec les angles orientés par rapport à la normale,

$$\boxed{n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2}$$

Théorème — Loi de la réflexion

Pour la réflexion, les deux segments sont dans le même milieu ($n_2 = n_1$) et la relation devient $\vec{u}_2 - \vec{u}_1 = (a/n_1)\vec{N}$, d'où $\vec{N} \times \vec{u}_2 = \vec{N} \times \vec{u}_1$: le rayon réfléchi est dans le plan d'incidence et $\sin i_2 = \sin i_1$. Cette équation admet deux solutions, $\vec{u}_2 = \vec{u}_1$ (pas de miroir) et $\vec{u}_2 = \vec{u}_1 - 2(\vec{u}_1 \cdot \vec{N}) \vec{N}$; la condition que le rayon réfléchi reparte dans le milieu 1 sélectionne la seconde, soit, en angles orientés, $\boxed{i_2 = -i_1}$.



$$AI + IB = A'I + IB = A'B \quad (\text{droite : minimum})$$

$$AJ + JB = A'J + JB > A'B \quad (\text{ligne brisée})$$

FIG. 7. Construction de Héron : grâce à l'image A' de A , le chemin AIB se « déplie » en la droite $A'B$, plus courte que toute ligne brisée $A'JB$. Pour un miroir plan, le chemin stationnaire est un minimum.

Propriété – Réflexion totale

Si $n_1 > n_2$, la relation $\sin i_2 = (n_1/n_2) \sin i_1$ n'a de solution que pour $i_1 \leq i_\ell$ avec

$$\sin i_\ell = \frac{n_2}{n_1}$$

Au-delà, il n'existe pas de rayon réfracté : toute la lumière est réfléchi (réflexion totale).

Ordres de grandeur – angles limites vers l'air

verre ($n = 1,5$) : $i_\ell = 41,8^\circ$; eau : $48,6^\circ$; PMMA : $42,2^\circ$; diamant : $24,4^\circ$ (d'où son éclat : presque toute la lumière entrée ressort par la table). Applications : prismes à réflexion totale des jumelles, réfractomètre d'Abbe (mesure de n par l'angle limite), fibres optiques à saut d'indice.

Expérience – Lois de Snell–Descartes avec un hémicylindre

Matériel : laser He-Ne ou diode (< 1 mW), demi-cylindre de PMMA sur disque gradué (figure 8), écran.

Protocole. Le faisceau entre par la face courbe en visant le centre O du disque : il arrive selon un rayon du cylindre, donc sous incidence normale, et n'est pas dévié. Il atteint la face plane en O sous l'angle i_1 (lu sur le disque) et ressort dans l'air sous i_2 . On fait varier i_1 de 0° à 40° par pas de 5° et on relève i_2 ; on observe l'apparition de la réflexion totale vers $i_1 \simeq 42^\circ$.

Exploitation. On trace $\sin i_2$ en fonction de $\sin i_1$: la régression linéaire passant par l'origine donne la pente n . Valeurs attendues pour $n = 1,49$: $i_1 = 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ \Rightarrow i_2 = 15,0^\circ, 30,6^\circ, 48,2^\circ, 73,3^\circ$.

Incertitudes. Lecture des angles à $\pm 0,5^\circ$ (demi-graduation), tache laser de quelques millimètres sur le cercle : $u(i) \simeq 0,5^\circ$ soit 9 mrad ; $u(\sin i) = \cos i u(i)$. L'angle limite donne une seconde détermination indépendante, $n = 1/\sin i_\ell$, avec $u(n)/n = u(i_\ell)/\tan i_\ell \simeq 1\%$.

Pièges. Vérifier que le faisceau passe bien par le centre du disque (sinon la face courbe dévie) ; travailler avec un faisceau fin et un disque de grand rayon ; indiquer la longueur d'onde (dispersion).

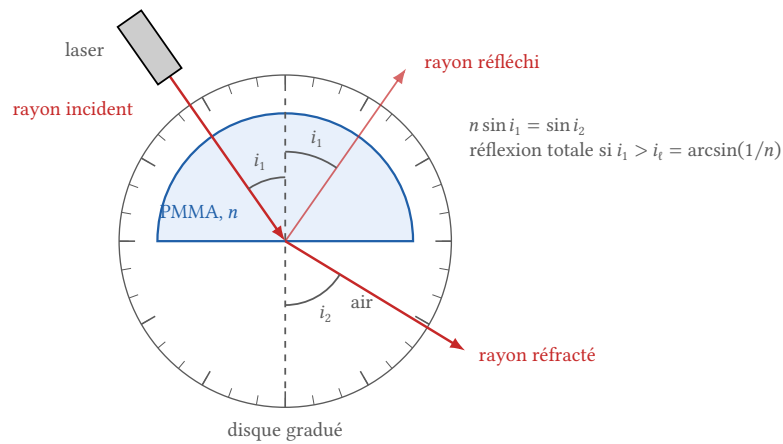


FIG. 8. Montage de l'hémicylindre : le faisceau entre sans déviation par la face courbe et se réfracte (ou se réfléchit totalement) sur la face plane, au centre du disque gradué.

3 Stigmatisme et égalité des chemins optiques

Définition — Stigmatisme rigoureux

Un système optique est rigoureusement stigmatique pour le couple (A, A') si tous les rayons issus de A passent par A' après traversée du système. A' est l'*image* de A .

Théorème — Condition de stigmatisme

Le système est rigoureusement stigmatique pour (A, A') si et seulement si le chemin optique $L(AA')$ est le même le long de tous les rayons issus de A .

Démonstration — idée

Le principe de Fermat s'applique à chaque rayon AA' ; mais si une *famille continue* de rayons issus de A aboutit en A' , le chemin optique, stationnaire le long de chacun, ne peut varier d'un rayon à l'autre : la variation de L lorsqu'on passe d'un rayon de la famille à son voisin est une variation à extrémités fixes, donc nulle. Réciproquement, le théorème de Malus–Dupin (ci-dessous) montre que si $L(AM)$ est constant sur une sphère centrée en A' , les rayons lui sont normaux et convergent en A' .

Exemple — Miroir parabolique

Pour la parabole de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$, $PF = PH$ (H projeté de P sur $\mathcal{D}$). Un rayon parallèle à l'axe arrivant d'une surface d'onde plane $x = x_0$ parcourt $QP + PF = QP + PH = QH = x_0 + f$: même chemin optique quel que soit le rayon, donc stigmatisme rigoureux pour (∞, F) (figure 9). C'est le principe des télescopes, des antennes paraboliques et des fours solaires. De même, le miroir elliptique est stigmatique pour ses foyers, le miroir plan pour tout couple (image virtuelle symétrique).

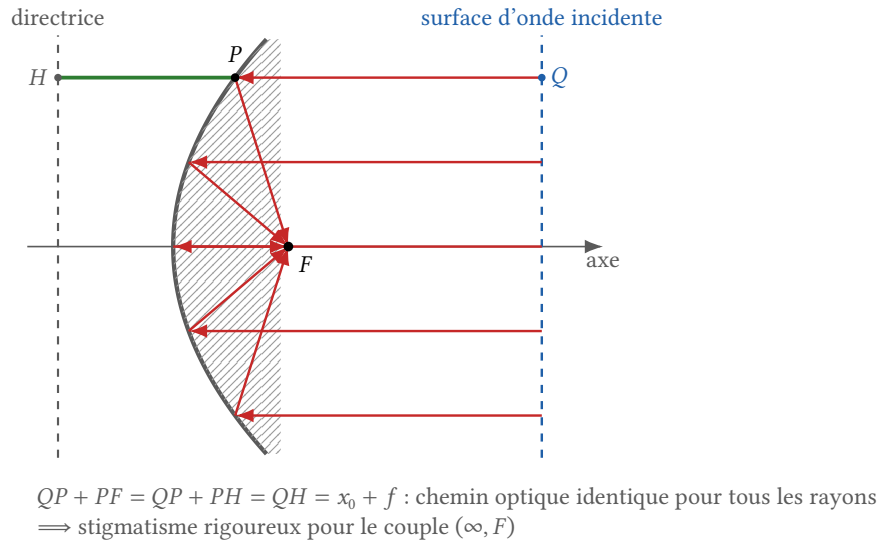


Fig. 9. Le miroir parabolique est rigoureusement stigmatique pour le couple (∞, F) : la propriété $PF = PH$ égalise les chemins optiques.

Exemple – Lentille

Une lentille convergente est épaisse au centre, mince au bord : le rayon axial parcourt un chemin géométrique plus court mais traverse plus de verre ($n > 1$) ; le rayon marginal parcourt un chemin plus long mais moins de verre. L'égalité des chemins optiques entre A et A' n'est réalisée que pour une forme de surface particulière (ovale de Descartes, ou lentille asphérique) : une lentille à faces sphériques n'est stigmatique que dans les conditions de Gauss (stigmatisme *approché*), à l'exception notable des points de Weierstrass d'un dioptre sphérique, rigoureusement stigmatique pour un unique couple de points (objectifs de microscope à immersion).

4 Théorème de Malus–Dupin et équation eikonale

Fixons la source A et considérons le chemin optique $L(M) = L(AM)$ le long du rayon issu de A qui aboutit en M (fonction *point caractéristique* de Hamilton). Déplaçons l'extrémité M de $d\vec{M}$: le trajet intermédiaire se réajuste, mais sa contribution à dL est nulle par le principe de Fermat (variation à extrémités fixes) ; seule subsiste la contribution de l'extrémité, donnée par la formule du segment :

$$dL = n(M) \vec{u}(M) \cdot d\vec{M} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{\text{grad}}L = n \vec{u}}.$$

Théorème – Malus–Dupin (1808–1816)

Dans un milieu isotrope, les rayons issus d'une source sont en tout point orthogonaux aux surfaces d'égal chemin optique (surfaces d'onde), et cette propriété se conserve après un nombre quelconque de réflexions et de réfractions.

Propriété – Équation eikonale

En prenant la norme : $\|\overrightarrow{\text{grad}}L\| = n$, soit $(\overrightarrow{\text{grad}}L)^2 = n^2$. Cette équation relie la géométrie des surfaces d'onde à l'indice ; elle est le pont entre optique géométrique et optique ondulatoire.

Démonstration – Du côté de Maxwell : la limite $\lambda_0 \rightarrow 0$

Dans un milieu LHI non magnétique d'indice lentement variable, chaque composante du champ monochromatique vérifie l'équation de Helmholtz $\Delta\psi + k_0^2 n^2 \psi = 0$. Cherchons une solution de la forme $\psi = a(\vec{r}) e^{ik_0 L(\vec{r})}$ (a et L réels, lentement variables). On calcule

$$\Delta\psi = \left[\Delta a + 2ik_0 \overrightarrow{\text{grad}}a \cdot \overrightarrow{\text{grad}}L + ik_0 a \Delta L - k_0^2 a (\overrightarrow{\text{grad}}L)^2 \right] e^{ik_0 L},$$

d'où, en reportant et en séparant les ordres en k_0 :

$$k_0^2 a [n^2 - (\overrightarrow{\text{grad}L})^2] + ik_0 [2 \overrightarrow{\text{grad}a} \cdot \overrightarrow{\text{grad}L} + a \Delta L] + \Delta a = 0.$$

Lorsque $k_0 \rightarrow \infty$ ($\lambda_0 \rightarrow 0$), le terme dominant impose $(\overrightarrow{\text{grad}L})^2 = n^2$: c'est l'équation eikonale. Le terme suivant, $\text{div}(a^2 \overrightarrow{\text{grad}L}) = 0$, exprime la conservation de l'énergie le long des rayons. Les rayons sont les courbes tangentes à $\overrightarrow{\text{grad}L}$; on en déduit l'équation des rayons du paragraphe suivant :

$$\frac{d}{ds}(n\vec{u}) = \frac{d}{ds}\overrightarrow{\text{grad}L} = (\vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{\text{grad}L} = \frac{1}{n}(\overrightarrow{\text{grad}L} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{\text{grad}L} = \frac{1}{n}\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{(\overrightarrow{\text{grad}L})^2}{2}\right) = \frac{1}{n}\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{n^2}{2}\right) = \overrightarrow{\text{grad}n}.$$

Le principe de Fermat n'est donc pas un postulat indépendant : c'est la limite des courtes longueurs d'onde des équations de Maxwell.

Le principe de Fermat redonne toutes les lois de l'optique géométrique élémentaire. Sa véritable puissance apparaît dans les milieux où l'indice varie continûment, situation hors de portée des lois de Snell–Descartes.

IV Milieux inhomogènes : courbure des rayons

1 Équation des rayons

Théorème — Équation des rayons

Dans un milieu d'indice $n(\vec{r})$ continûment variable, le rayon $\vec{r}(s)$ paramétré par son abscisse curviligne s , de vecteur tangent unitaire $\vec{u} = d\vec{r}/ds$, vérifie

$$\frac{d}{ds}\left(n \frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \overrightarrow{\text{grad}n}$$

Démonstration

Soit $\mathcal{C} : \vec{r}(s)$ le trajet réel entre S_1 et S_2 et $\mathcal{C}' : \vec{r} + \delta\vec{r}$ un trajet voisin, avec $\delta\vec{r} = \vec{0}$ aux extrémités. Le chemin optique est $L = \int n(\vec{r}) ds$ avec $ds = \|d\vec{r}\|$. Au premier ordre,

$$\delta n = \overrightarrow{\text{grad}n} \cdot \delta\vec{r}, \quad \delta(ds) = \frac{d\vec{r} \cdot \delta(d\vec{r})}{ds} = \vec{u} \cdot d(\delta\vec{r}),$$

donc

$$\delta L = \int_{S_1}^{S_2} (\overrightarrow{\text{grad}n} \cdot \delta\vec{r}) ds + \int_{S_1}^{S_2} n \vec{u} \cdot d(\delta\vec{r}).$$

Une intégration par parties de la seconde intégrale donne $[n \vec{u} \cdot \delta\vec{r}]_{S_1}^{S_2} - \int \delta\vec{r} \cdot d(n\vec{u})$; le terme tout intégré est nul (extrémités fixes). Ainsi

$$\delta L = \int_{S_1}^{S_2} \delta\vec{r} \cdot \left[\overrightarrow{\text{grad}n} - \frac{d}{ds}(n\vec{u}) \right] ds = 0 \quad \text{pour tout } \delta\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{ds}(n\vec{u}) = \overrightarrow{\text{grad}n}.$$

C'est l'équation d'Euler–Lagrange de la fonctionnelle L .

Propriété — Courbure d'un rayon

En projetant l'équation des rayons sur la base de Frenet ($\vec{u} = \vec{e}_T$, $d\vec{e}_T/ds = \vec{e}_N/R$ avec $\vec{e}_N$ dirigé vers le centre de courbure) :

$$\frac{dn}{ds}\vec{e}_T + \frac{n}{R}\vec{e}_N = \overrightarrow{\text{grad}n} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{n} \overrightarrow{\text{grad}n} \cdot \vec{e}_N > 0$$

Le rayon de courbure étant positif, $\overrightarrow{\text{grad}n} \cdot \vec{e}_N > 0$: **un rayon lumineux s'incurve vers les régions d'indice croissant** (sa concavité est tournée du côté de $\overrightarrow{\text{grad}n}$). La projection sur $\vec{e}_T$ redonne $dn/ds = \overrightarrow{\text{grad}n} \cdot \vec{e}_T$ (trivial) et celle sur la binormale montre que le rayon est localement contenu dans le plan $(\vec{e}_T, \overrightarrow{\text{grad}n})$.

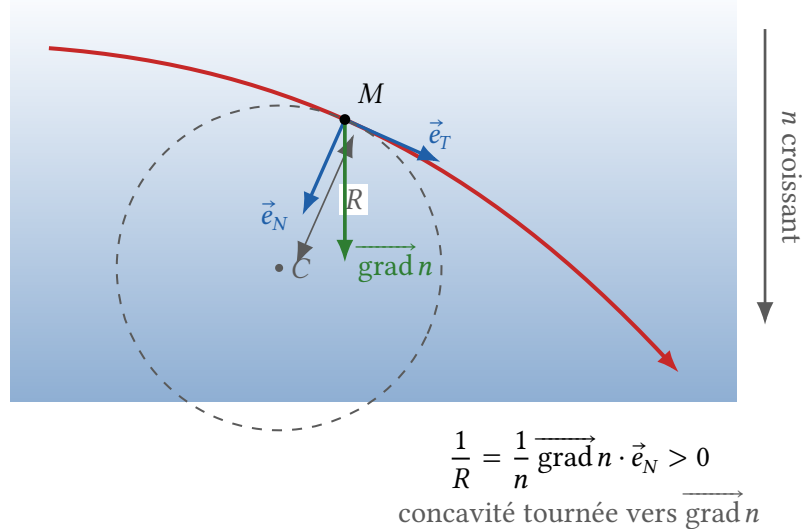


FIG. 10. Courbure d'un rayon dans un gradient d'indice : le centre de courbure est du côté des indices croissants.

Propriété – Milieu stratifié : loi de Snell–Descartes généralisée

Si n ne dépend que de z , la composante selon x de l'équation des rayons donne $d(n u_x)/ds = \partial n/\partial x = 0$, soit

$$n(z) \sin i(z) = \text{cte}$$

où i est l'angle du rayon avec la direction Oz du gradient. C'est la loi de Snell–Descartes appliquée à une succession de couches infiniment minces.

Expérience – Cuve à gradient d'indice

Matériel : cuve parallélépipédique en verre (30 cm de long), eau, sucre (≈ 1 kg), laser, écran (figure 11).

Préparation (la veille) : verser au fond une solution de sucre saturée ($n \approx 1,45$), puis, très lentement et à travers un flotteur, de l'eau pure ($n = 1,333$) ; la diffusion crée en quelques heures un gradient continu de concentration, donc d'indice, sur une dizaine de centimètres.

Observation. Un faisceau laser horizontal lancé dans la zone de gradient se courbe *vers le bas*, du côté des indices croissants ; envoyé obliquement vers le bas, il peut se retourner (réflexion totale « continue ») : c'est un mirage inférieur inversé. On visualise le trajet grâce à la diffusion (une pointe de lait ou de fluorescéine).

Exploitation. Avec $n(z)$ approximativement linéaire, la mesure du rayon de courbure R (ajustement d'un cercle sur la photographie du faisceau) donne $dn/dz = n/R$; pour $R \approx 0,5$ m, $dn/dz \approx 3 \text{ m}^{-1}$, cohérent avec $\Delta n \approx 0,1$ sur 4 cm.

Pièges. Ne pas agiter la cuve ; éviter les bulles ; l'alcool, moins dense mais d'indice *plus élevé* que l'eau (1,36 contre 1,33), donne au contraire un gradient d'indice croissant vers le haut, donc un faisceau qui s'incurve vers le haut : bon contre-exemple pour tester la compréhension du signe.

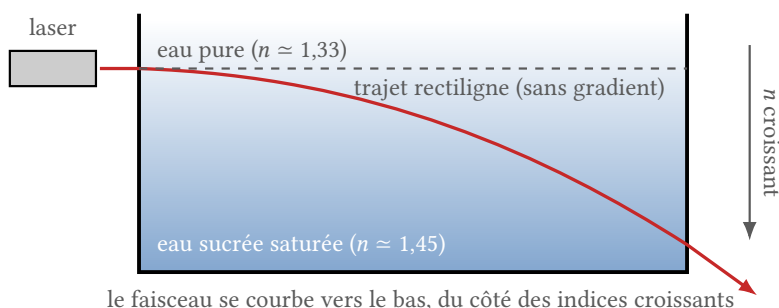


FIG. 11. Cuve à gradient d'indice : le faisceau laser s'incurve vers le bas, où l'indice est le plus élevé.

2 Mirages

Au-dessus d'une route surchauffée, l'air est plus chaud, donc moins dense, près du sol : à pression constante, $n - 1 \propto \rho \propto 1/T$, et n croît avec l'altitude. Un rayon venant du ciel et descendant obliquement voit n diminuer : d'après $n \sin i = \text{cte}$, son angle i avec la verticale augmente jusqu'à 90° , puis le rayon remonte (figure 12a). L'observateur reçoit sous l'horizon de la lumière venant du ciel : il « voit » une flaque brillante qui reflète le ciel et qui recule quand on s'en approche. C'est le **mirage inférieur**.

Au-dessus d'une mer froide (inversion de température, n décroît rapidement avec z), les rayons s'incurvent vers le bas et un objet situé derrière l'horizon apparaît surélevé, parfois dédoublé : **mirage supérieur**, ou *Fata Morgana* (figure 12b).

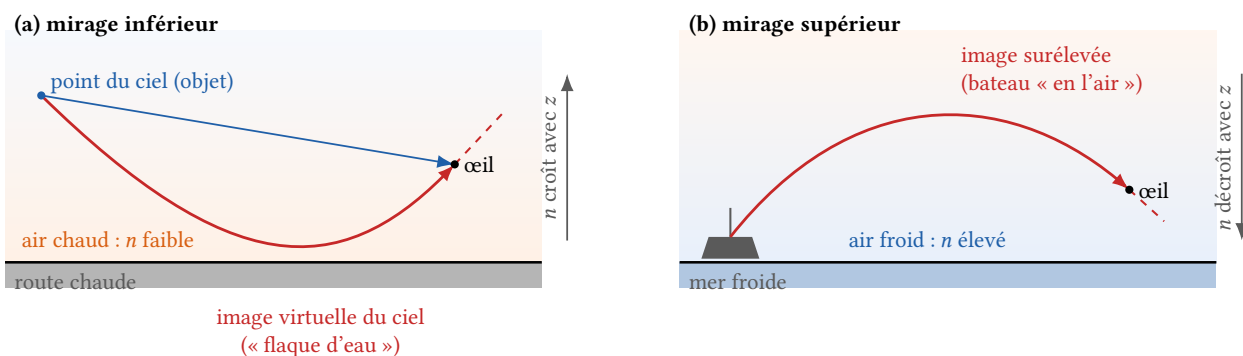


FIG. 12. (a) Mirage inférieur : l'image virtuelle du ciel apparaît sous l'horizon ; (b) mirage supérieur : l'objet apparaît au-dessus de sa position réelle.

Ordres de grandeur — mirage inférieur

Pour un écart de 40 K sur 15 cm au-dessus du sol, $dn/dz \simeq (n-1) \frac{1}{T} \left| \frac{dT}{dz} \right| \sim 1 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ et $R = n/(dn/dz) \sim 10 \text{ km}$. Un rayon de courbure aussi grand ne retourne que des rayons *rasants* : l'écart total d'indice entre le sol et 2 m d'altitude, $\Delta n \sim 3 \times 10^{-5}$, limite l'angle de visée sous l'horizon à $\theta \simeq \sqrt{2\Delta n} \simeq 0,5^\circ$ (figure 13a). C'est pourquoi le mirage n'est visible qu'au ras du sol et à plus d'une centaine de mètres.

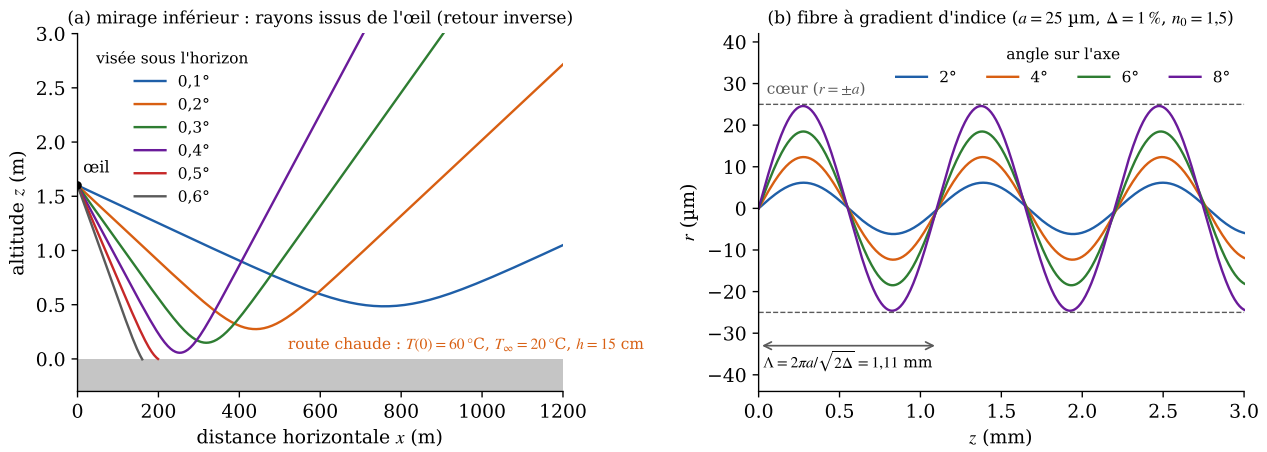


FIG. 13. Intégration numérique de l'équation des rayons. (a) Rayons issus de l'œil (retour inverse) au-dessus d'une route chaude : seules les visées à moins de $0,5^\circ$ sous l'horizon se retournent vers le ciel. (b) Fibre à gradient d'indice parabolique : trajectoires quasi sinusoïdales de même période quelle que soit l'inclinaison.

3 Fibres optiques

Dans une **fibre à saut d'indice** (cœur n_1 , gaine $n_2 < n_1$), la lumière est guidée par réflexion totale (figure 14a). Un rayon entrant depuis l'air sous l'angle θ fait dans le cœur l'angle θ' avec l'axe, $\sin \theta = n_1 \sin \theta'$, et subit la réflexion totale sur la gaine si $\cos \theta' \geq n_2/n_1$; d'où le cône d'acceptance

$$\sin \theta_a = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (\text{ouverture numérique}).$$

Pour $n_1 = 1,48$ et $n_2 = 1,46$: $\sin \theta_a = 0,24$, $\theta_a \approx 14^\circ$. Mais les rayons inclinés parcourent un chemin plus long que le rayon axial : une impulsion s'étale (dispersion intermodale, $\sim 50 \text{ ns} \cdot \text{km}^{-1}$), ce qui limite le débit.

La **fibre à gradient d'indice** corrige ce défaut avec un profil parabolique $n^2(r) = n_0^2[1 - 2\Delta(r/a)^2]$. Pour des rayons peu inclinés ($ds \approx dz$, $n \approx n_0$), l'équation des rayons projetée sur Ox devient

$$n_0 \frac{d^2x}{dz^2} = \frac{\partial n}{\partial x} \approx -\frac{2n_0\Delta}{a^2} x \quad \Rightarrow \quad x(z) = x_0 \cos\left(\frac{\sqrt{2\Delta}}{a} z + \varphi\right), \quad \Lambda = \frac{2\pi a}{\sqrt{2\Delta}}.$$

Tous les rayons sont refocalisés périodiquement sur l'axe (figure 13b) ; les rayons les plus écartés voyagent dans des régions d'indice plus faible, donc plus vite : la dispersion intermodale est réduite d'un facteur $8/\Delta \sim 10^3$ (étalement $n_0\Delta^2 L/8c$ au lieu de $n_0\Delta L/c$). Pour $a = 25 \mu\text{m}$ et $\Delta = 1\%$, $\Lambda = 1,1 \text{ mm}$.

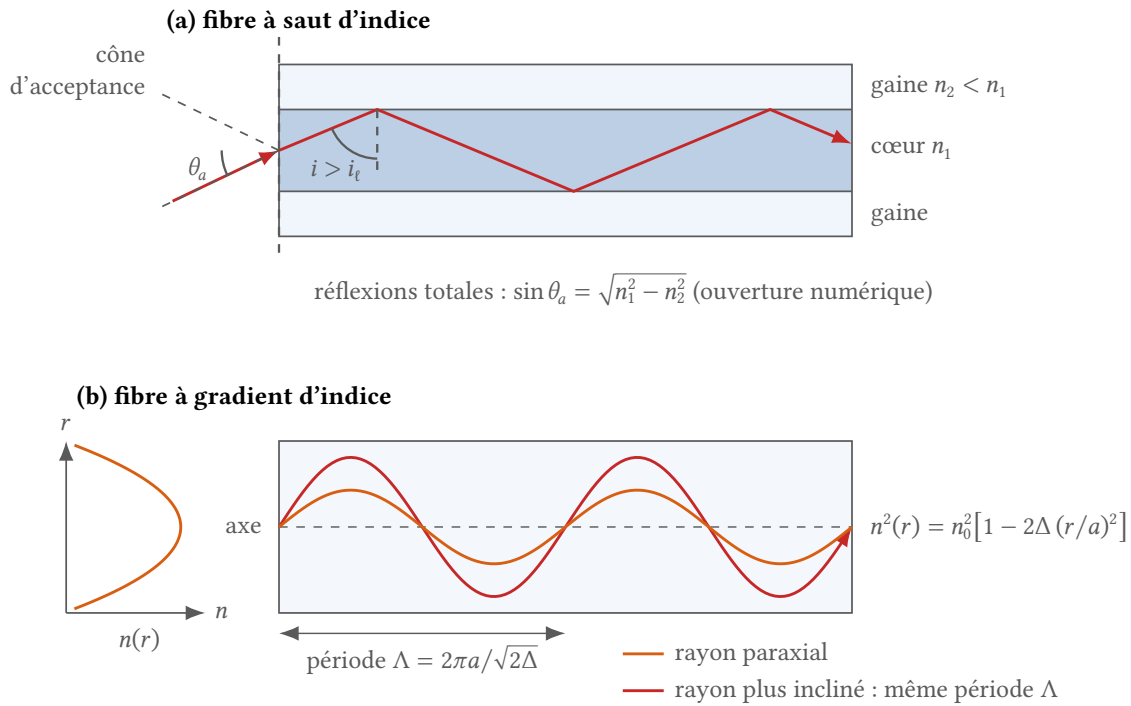


FIG. 14. (a) Fibre à saut d'indice : guidage par réflexions totales dans le cône d'acceptance. (b) Fibre à gradient d'indice : profil parabolique et trajectoires sinusoïdales.

Expérience — Guidage de la lumière

Fontaine lumineuse (Colladon, 1841) : un laser éclaire par l'arrière l'orifice d'un récipient d'eau ; le jet qui s'en échappe guide la lumière par réflexions totales successives et s'illumine là où il se brise. *Fibre de PMMA* de 1 m : mesurer l'ouverture numérique en relevant le diamètre d du cône de sortie sur un écran à la distance D , $\sin \theta_a \approx d/(2D)$, et comparer à $\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ (fiche constructeur, typiquement 0,5 pour le plastique). Montrer qu'un fort rayon de courbure de la fibre fait fuir la lumière (perte du guidage quand $i < i_t$).

4 Réfraction atmosphérique

L'atmosphère est un milieu stratifié à symétrie sphérique : $n = n(r)$, décroissant de $n_0 \approx 1,000\,29$ au sol à 1 en haut. Multiplions vectoriellement l'équation des rayons par $\vec{r}$:

$$\frac{d}{ds}(\vec{r} \times n\vec{u}) = \underbrace{\vec{u} \times n\vec{u}}_{\vec{0}} + \vec{r} \times \overrightarrow{\text{grad}n} = \vec{0}, \quad \text{car } \overrightarrow{\text{grad}n} = n'(r)\vec{r}/r \parallel \vec{r}.$$

Propriété — Invariant de Bouguer (1729)

Dans un milieu à symétrie sphérique, $\vec{r} \times n\vec{u}$ est conservé le long d'un rayon :

$$n(r)r \sin i = \text{cte}$$

où i est l'angle du rayon avec la verticale locale. C'est l'analogue du moment cinétique dans un champ de force central ; le rayon reste dans un plan contenant le centre de la Terre.

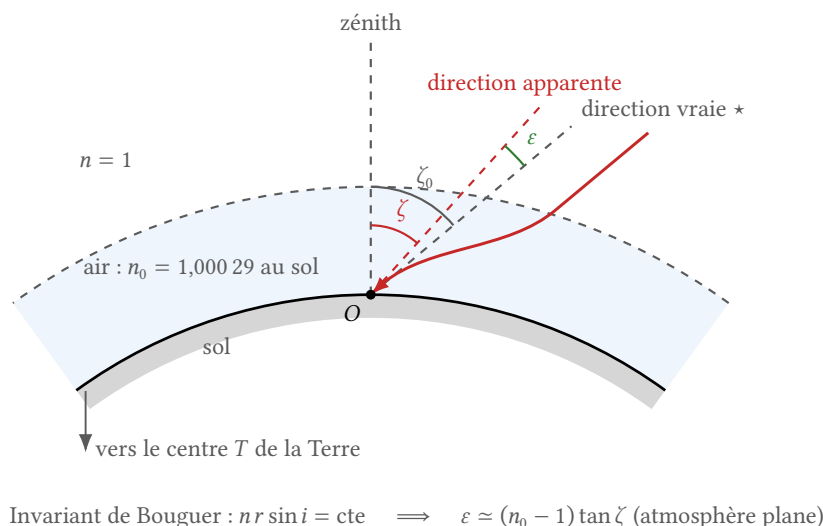


Fig. 15. Réfraction atmosphérique : le rayon s'incurve vers le sol (indices croissants) et l'astre paraît plus haut qu'il n'est, d'un angle $\varepsilon = \zeta_0 - \zeta$.

Comme l'épaisseur utile de l'atmosphère ($h \sim 10$ km, troposphère) est petite devant $R_T = 6\,400$ km, on peut, loin de l'horizon, la traiter comme plane : $n \sin i = \text{cte}$. Entre le haut de l'atmosphère ($n = 1$, le rayon fait avec la verticale l'angle zénithal vrai ζ_0 de l'étoile) et le sol (n_0 , angle zénithal apparent ζ) :

$$\sin \zeta_0 = n_0 \sin \zeta \implies \sin(\zeta + \varepsilon) \simeq \sin \zeta + \varepsilon \cos \zeta = n_0 \sin \zeta \implies \boxed{\varepsilon \simeq (n_0 - 1) \tan \zeta}$$

L'astre paraît *relevé* vers le zénith. Numériquement, $n_0 - 1 = 2,8 \times 10^{-4}$ donne $\varepsilon \simeq 58'' \tan \zeta$: 1' à $\zeta = 45^\circ$, 5' à 80° .

Attention — limite de l'atmosphère plane

La formule diverge à l'horizon ($\tan \zeta \rightarrow \infty$) : il faut alors tenir compte de la courbure des couches (invariant de Bouguer) et du profil réel de densité. La réfraction à l'horizon vaut environ 34' à 35' (formule empirique de Bennett), soit *plus* que le diamètre apparent du Soleil (32') : quand le bord inférieur du Soleil semble toucher l'horizon, le disque entier est déjà géométriquement couché. Le lever est avancé et le coucher retardé de deux à trois minutes environ aux latitudes moyennes.

Exemple — Soleil aplati et rayon vert

Au coucher, le bord inférieur ($\zeta \simeq 90^\circ$) est relevé de 35', le bord supérieur ($\zeta \simeq 89,5^\circ$) de 29' seulement : le diamètre vertical apparent est réduit d'environ 6', soit 20 % ; le diamètre horizontal est inchangé. Comme $n_0 - 1$ dépend de λ (plus grand dans le bleu), l'image bleue du Soleil est relevée d'environ 0,5' (une trentaine de secondes d'arc) de plus que l'image rouge, l'image verte d'environ 15'' : au dernier instant, le bord supérieur n'est plus formé que par les courtes longueurs d'onde. Cette séparation est inférieure au pouvoir séparateur de l'œil ($\simeq 1'$) : le phénomène est très bref et il est le plus souvent amplifié par un mirage (couche d'inversion). Le bleu étant diffusé par l'atmosphère (diffusion Rayleigh en $1/\lambda^4$), il reste le *rayon vert*, observable par temps très clair sur un horizon marin.

Point agrégation — Le mirage est-il une illusion d'optique ?

Non : c'est une image optique réelle au sens de l'optique géométrique, photographiable. Ce qui trompe, c'est l'interprétation cérébrale (« les rayons se propagent en ligne droite, donc l'objet est là-bas »). On peut d'ailleurs inverser le raisonnement : la connaissance de la position vraie d'une étoile permet de mesurer $n_0 - 1$, et les astronomes corrigent systématiquement la réfraction (tables de réfraction) ; les systèmes GPS corrigent de même le retard de propagation dans la troposphère.

Conclusion : l'analogie optico-mécanique

L'équation des rayons $\frac{d}{ds}(n\vec{u}) = \overrightarrow{\text{grad}n}$ rappelle une équation de la mécanique. Pour une particule de masse m , d'énergie E dans un potentiel $V(\vec{r})$, le principe de Maupertuis affirme que la trajectoire rend stationnaire l'action réduite $\int p \, ds$, avec $p = \sqrt{2m(E - V)}$. La comparaison avec $\delta \int n \, ds = 0$ suggère la correspondance $n \leftrightarrow p$; on vérifie en effet, à partir de $m \, d\vec{v}/dt = -\overrightarrow{\text{grad}V}$ et $ds = v \, dt$, que

$$\frac{d}{ds}(p\vec{u}) = \frac{1}{v} \frac{d(m\vec{v})}{dt} = -\frac{\overrightarrow{\text{grad}V}}{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\sqrt{2m(E - V)} = \overrightarrow{\text{grad}p}.$$

La trajectoire d'un rayon dans le milieu $n(\vec{r})$ est celle d'une particule fictive de quantité de mouvement $p = n$: c'est l'*analogie de Hamilton* (vers 1830), que de Broglie (1923–1924) réinterprète avec $\lambda = h/p$: $p \propto 1/\lambda$ comme $n \propto 1/\lambda$. Schrödinger (1926) complète le tableau en cherchant l'équation d'onde dont la mécanique classique est la limite, exactement comme l'optique géométrique est la limite eikonale de l'optique ondulatoire.

Optique	Mécanique
optique ondulatoire (Helmholtz)	mécanique quantique (Schrödinger)
limite $\lambda_0 \rightarrow 0$: équation eikonale $(\overrightarrow{\text{grad}L})^2 = n^2$	limite $\hbar \rightarrow 0$: Hamilton–Jacobi $(\overrightarrow{\text{grad}S})^2 = 2m(E - V)$
rayon lumineux, $\delta \int n \, ds = 0$ (Fermat)	trajectoire, $\delta \int p \, ds = 0$ (Maupertuis)
chemin optique L , phase $k_0 L$	action réduite S , phase $S/\hbar$
$\frac{d}{ds}(n\vec{u}) = \overrightarrow{\text{grad}n}$	$\frac{d}{ds}(p\vec{u}) = \overrightarrow{\text{grad}p}$

Dans la formulation de Feynman (intégrales de chemin), chaque trajet contribue avec la phase $S/\hbar$ et la trajectoire classique émerge par phase stationnaire, exactement comme le rayon émerge de la somme de Huygens–Fresnel. Le principe de Fermat, premier principe variationnel de l'histoire, est ainsi le prototype de la façon dont la physique moderne formule ses lois.

Annexe A — Questions classiques du jury

- Q1.** *Le principe de Fermat est-il un principe de moindre temps ?* — Non : de temps *stationnaire*. Contre-exemple : miroir concave plus courbé que l'ellipse de foyers A, B (chemin maximal). L'énoncé de Fermat lui-même parlait de minimum ; la reformulation est due à Hamilton.
- Q2.** *Est-ce un principe fondamental ?* — Non : c'est une conséquence des équations de Maxwell dans la limite $\lambda_0 \rightarrow 0$ (équation eikonale), ou du principe de Huygens–Fresnel par phase stationnaire. Il tombe en défaut là où la diffraction compte (bords, caustiques, foyers).
- Q3.** *Pourquoi la lumière « choisit-elle » ce chemin ?* — Elle ne choisit pas : tous les chemins contribuent, et seuls ceux proches du chemin stationnaire interfèrent constructivement.
- Q4.** *Fermat ou Huygens pour démontrer Snell–Descartes ?* — Les deux sont équivalents dans un milieu isotrope (théorème de Malus–Dupin : rayons $\perp$ surfaces d'onde). Fermat est plus économique pour les milieux inhomogènes ; Huygens se généralise mieux aux milieux anisotropes.
- Q5.** *Le retour inverse est-il toujours vrai ?* — Dans les milieux réciproques. Il est violé par les milieux magnéto-optiques (effet Faraday, isolateurs optiques) et, plus généralement, par tout milieu dont le tenseur diélectrique n'est pas symétrique.
- Q6.** *Que devient le principe dans un milieu anisotrope ?* — Il reste valable à condition d'utiliser l'indice de rayon n_r (chemin optique $\int n_r ds$ le long du rayon, qui n'est plus colinéaire à $\vec{k}$).
- Q7.** *Et dans un milieu dispersif ?* — Le principe s'applique à chaque composante monochromatique avec $n(\omega)$; les rayons de couleurs différentes suivent des trajets différents (arc-en-ciel, rayon vert, aberration chromatique).
- Q8.** *Vers où se courbe un rayon ?* — Vers les indices croissants : $1/R = \vec{e}_N \cdot \overrightarrow{\text{grad}n}/n > 0$. Mnémotechnique : le rayon « préfère » ralentir (la lumière va plus lentement là où n est grand).
- Q9.** *Pourquoi la route paraît-elle mouillée ?* — L'œil reçoit sous l'horizon de la lumière issue du ciel ; le cerveau l'interprète comme une réflexion sur une surface d'eau. La « flaque » recule quand on avance car seuls les rayons rasants ($< 0,5^\circ$) se retournent.
- Q10.** *Le Soleil couchant est-il déjà couché ?* — Oui : la réfraction à l'horizon ($\approx 35'$) dépasse son diamètre apparent ($32'$). Elle allonge le jour de quatre à six minutes environ aux latitudes moyennes.
- Q11.** *Applications industrielles de l'équation des rayons ?* — Fibres à gradient d'indice, lentilles GRIN (micro-optique, endoscopes), conception des antennes (lentille de Luneburg), optique adaptative, cristallin de l'œil (indice de 1,386 en périphérie à 1,406 au centre).
- Q12.** *Quelle expérience trancha entre Descartes et Fermat ?* — Foucault (1850) mesura par la méthode du miroir tournant $v_{\text{eau}} < v_{\text{air}}$: la lumière ralentit dans les milieux denses, comme l'exige le principe de Fermat (et le modèle ondulatoire), contrairement au modèle corpusculaire de Descartes–Newton.

Annexe B — Erreurs et imprécisions corrigées par rapport aux notes manuscrites

- « c , la constante d'Einstein » $\rightarrow$ vitesse de la lumière dans le vide, valeur exacte $299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; « constante d'Einstein » désigne $8\pi G/c^4$.
- « Le rayon lumineux se déplace à la vitesse c/n » $\rightarrow$ le rayon est une courbe ; c/n est la vitesse de *phase*, l'énergie allant à la vitesse de groupe.
- « $\vec{k}$ colinéaire au vecteur de Poynting » $\rightarrow$ seulement dans un milieu isotrope ; hypothèse rendue explicite.
- Datation : lettre à Cureau de la Chambre (1657) et *Synthèse pour les réfractions* (1662) ; énoncé moderne de stationnarité dû à Hamilton (1828–1837) ; de Broglie 1923–1924.
- Loi de la réflexion : $\vec{N} \times \vec{u}_2 = \vec{N} \times \vec{u}_1$ admet aussi la solution triviale $\vec{u}_2 = \vec{u}_1$; la condition « le rayon repart dans le milieu 1 » a été ajoutée, et la loi s'écrit $i_2 = -i_1$ en angles orientés.

6. Équation des rayons : l'hypothèse d'extrémités fixes ($\delta \vec{r} = \vec{0}$ en S_1 et S_2), implicite dans les notes, est énoncée ; la variation $\delta(ds) = \vec{u} \cdot d(\delta \vec{r})$ est justifiée.
7. « $\varepsilon \simeq (n - 1) \tan \zeta$: l'approximation est toujours valable ! » $\rightarrow$ fausse près de l'horizon ($\tan \zeta \rightarrow \infty$) ; la réfraction à l'horizon vaut $35'$ et c'est précisément elle qui explique l'aplatissement du Soleil évoqué dans les notes.
8. Valeur numérique : $\varepsilon(45^\circ) \simeq 2,8 \times 10^{-4} \text{ rad} \simeq 58''$ (notes : « $3 \times 10^{-4} \text{ rad}$ », ordre de grandeur correct).
9. Conclusion : « particule fictive de vitesse $\vec{e}_T$ » $\rightarrow$ de quantité de mouvement $p \vec{e}_T$ avec $p \leftrightarrow n$; la force « $v \text{ grad} n$ » dérive de $V = -n^2/2$, et l'analogie rigoureuse est celle de Maupertuis.
10. « $n_{\text{air}} \sim 1$ » $\rightarrow n_{\text{air}} - 1 \simeq 2,9 \times 10^{-4}$, grandeur qui pilote toute la réfraction atmosphérique ; tableau d'indices complété.
11. Plan : les notes ne minutaient que quatre sous-parties ; un plan complet de 40 minutes est proposé, et les parties stigmatisme, Malus–Dupin, eikonale, fibres et mirages, absentes ou seulement évoquées, ont été rédigées.

Bibliographie

- [1] J.-P. PÉREZ, *Optique : fondements et applications*, Dunod, 7^e éd., 2004, chap. 1 (bases de l'optique géométrique) et chap. 2 (principe de Fermat, milieux inhomogènes, mirages).
- [2] E. HECHT, *Optics*, Pearson, 5^e éd., 2017, §4.5 (Fermat's principle) et §5.2 (stigmatisme et égalité des chemins optiques).
- [3] M. BORN, E. WOLF, *Principles of Optics*, Cambridge University Press, 7^e éd., 1999, chap. 3 (eikonale, équation des rayons, Fermat, Malus–Dupin) et appendice I (analogie optico-mécanique).
- [4] R. FEYNMAN, R. LEIGHTON, M. SANDS, *Le cours de physique de Feynman*, Mécanique 2, Dunod, chap. 26 (« Optique : le principe du moindre temps ») et 27.
- [5] R. FEYNMAN, *Lumière et matière, une étrange histoire*, Points Sciences, 1987 (phase stationnaire et principe de Fermat).
- [6] SEXTANT, *Optique expérimentale*, Hermann, 1997 (expériences d'optique géométrique).
- [7] R. DUFFAIT, *Expériences d'optique à l'agrégation de sciences physiques*, Bréal (cuve à gradient d'indice, fibres).
- [8] L. LANDAU, E. LIFCHITZ, *Théorie des champs*, §53–54 (optique géométrique, eikonale) ; *Mécanique*, §44 (principe de Maupertuis).
- [9] R. TAILLET, L. VILLAIN, P. FEBVRE, *Dictionnaire de physique*, De Boeck, 4^e éd., 2018 (entrées *Fermat*, *mirage*, *eikonale*).
- [10] G. G. BENNETT, « The calculation of astronomical refraction in marine navigation », *Journal of Navigation* **35**, 255–259 (1982).
- [11] P. de FERMAT, lettre à Cureau de la Chambre (1657) et *Synthèse pour les réfractions* (1662), dans *Œuvres de Fermat*, t. II, Gauthier-Villars, 1894.
- [12] CODATA 2018, valeurs recommandées des constantes fondamentales (NIST).