

LP35

Diffraction de Fraunhofer

Notes de cours — préparation à l'agrégation de physique

Rémi Mevaere — sciences-physiques.net

Niveau	Licence 3 de physique. Le cœur de la leçon (fente, réseau, tache d'Airy, critère de Rayleigh) est au programme de CPGE deuxième année; la formule de Fresnel-Kirchhoff relève de la licence.
Prérequis	Optique géométrique et ses limites; ondes électromagnétiques, équations de d'Alembert et de Helmholtz; principe de Huygens-Fresnel (énoncé qualitatif); interférences à deux ondes; transformée de Fourier (linéarité, translation, dilatation, théorème de Parseval); fonctions de Bessel (résultats admis).
Bibliographie	M. BORN et E. WOLF, <i>Principles of Optics</i> , Cambridge, chap. 8; J. W. GOODMAN, <i>Introduction to Fourier Optics</i> , Roberts, chap. 3–5; E. HECHT, <i>Optique</i> , Pearson, chap. 10; J.-Ph. PÉREZ, <i>Optique, fondements et applications</i> , Dunod, chap. « Diffraction »; R. TAILLET, <i>Optique physique</i> , De Boeck; Sextant, <i>Optique expérimentale</i> , Hermann; R. DUFFAIT, <i>Expériences d'optique</i> , Bréal.

⚠ Avertissement

Ce document reprend mes **notes de cours personnelles** rédigées pour la préparation à l'agrégation de physique. Il peut servir de support de travail, mais il doit **impérativement être retravaillé** par chaque candidat : le plan, le niveau, les démonstrations et les expériences sont à adapter à sa propre leçon et au programme en vigueur. Malgré le soin apporté à la relecture, une erreur reste possible.

Plan et minutage

Partie	Durée	Point clé / expérience
Introduction	3 min	Expérience introductive : laser et fente réglable
I. De Huygens-Fresnel à Fraunhofer	14 min	Formule de Fresnel-Kirchhoff, nombre de Fresnel, montage à deux lentilles, amplitude = transformée de Fourier
II. Figures de diffraction d'ouvertures simples	15 min	Fente (mesure de b), réseau de N fentes, tache d'Airy
III. Applications	6 min	Critère de Rayleigh; filtrage spatial (expérience d'Abbe)
Conclusion	2 min	Ordre λ/D ; ouverture vers Fresnel, rayons X, imagerie

Introduction

Expérience — Expérience introductive : laser et fente réglable

Un faisceau laser He-Ne traverse une fente de largeur réglable; l'écran est placé à plusieurs mètres. Pour une fente large, on observe la trace géométrique du faisceau. En **fermant** la fente, la tache sur l'écran **s'élargit** perpendiculairement à la fente et se structure en une tache centrale brillante bordée de taches secondaires de plus en plus faibles. L'optique géométrique, qui prévoit une ombre de plus en plus étroite,

est prise en défaut.

Ce phénomène, la **diffraction**, apparaît chaque fois qu'une onde rencontre un obstacle ou une ouverture dont les dimensions ne sont pas très grandes devant la longueur d'onde. Il est inhérent à la nature ondulatoire de la lumière et limite la résolution de tous les instruments d'optique.

Repère historique

Des observations qualitatives sont attribuées à Léonard de Vinci (fin du xv^e siècle). Le jésuite Francesco Maria **Grimaldi** décrit le phénomène et forge le mot *diffRACTio* dans un ouvrage posthume (1665). **Huygens** (1690) propose les ondelettes secondaires, **Young** (1801) le principe d'interférence, et **Fresnel** (1818) les combine dans un mémoire couronné par l'Académie en 1819; Poisson objecte qu'un disque opaque devrait alors présenter un point brillant au centre de son ombre, ce qu'Arago vérifie aussitôt. **Kirchhoff** (1882) donne au principe de Huygens-Fresnel sa base mathématique à partir de l'équation d'onde, et **Sommerfeld** (1896) obtient la première solution rigoureuse (demi-plan parfaitement conducteur). Le problème général reste très difficile : cette leçon se place dans l'*approximation de Fraunhofer*, la plus simple et la plus utile en pratique.

Partons de l'équation d'onde pour établir, avec des approximations contrôlées, une formule opératoire de la diffraction « à l'infini ».

I De Huygens-Fresnel à Fraunhofer

1 Cadre : théorie scalaire et équation de Helmholtz

Dans un milieu linéaire, homogène, isotrope, non magnétique et sans charges ni courants libres, les équations de Maxwell ($\text{div } \vec{D} = 0$, $\text{div } \vec{B} = 0$, $\text{rot } \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$, $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \partial_t \vec{D}$ avec $\vec{D} = n^2 \epsilon_0 \vec{E}$ et $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$) conduisent à l'équation de d'Alembert pour chaque composante cartésienne ψ de $\vec{E}$ ou de $\vec{B}$:

$$\Delta \psi - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0.$$

On adopte la **convention** $\psi(M, t) = \Re[\underline{\psi}(M) e^{-i\omega t}]$: une onde monochromatique vérifie alors l'**équation de Helmholtz**

$$(\Delta + k^2) \underline{\psi} = 0, \quad k = \frac{n\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

et l'onde sphérique divergente issue d'un point s'écrit e^{ikr}/r .

Attention — Convention de signe

Avec la convention $e^{i(\omega t - kr)}$, fréquente dans les ouvrages français, tous les i des formules qui suivent changent de signe (ondes sphériques e^{-ikr}/r , préfacteur $+i/\lambda$, noyau de Fourier $e^{+2i\pi(uX+vY)}$). Les *intensités* ne dépendent pas de la convention. Les notes manuscrites mélangeaient les deux : il faut en choisir une et s'y tenir.

Remarque. Traiter une composante scalaire revient à négliger le couplage entre composantes imposé par les conditions aux limites sur l'écran : c'est la *théorie scalaire*, excellente dès que l'ouverture est grande devant λ et que l'on observe loin des bords. Elle ne dit rien de la polarisation.

2 Théorème intégral de Kirchhoff et formule de Fresnel-Kirchhoff

Théorème – Théorème intégral de Kirchhoff (1882)

Soit $\underline{\psi}$ une solution de l'équation de Helmholtz, continue ainsi que ses dérivées premières dans un volume V limité par une surface fermée $\mathcal{S}$. Pour tout point P intérieur à V ,

$$\underline{\psi}(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\mathcal{S}} \left[\underline{\psi} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{iks}}{s} \right) - \frac{e^{iks}}{s} \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial n} \right] dS,$$

où s est la distance de P au point courant de $\mathcal{S}$ et $\vec{n}$ la normale rentrante.

Démonstration – idée

On applique la seconde identité de Green à $\underline{\psi}$ et à la fonction de Green $G = e^{iks}/s$, toutes deux solutions de Helmholtz, dans le volume V privé d'une petite sphère centrée en P (où G diverge). La contribution de la petite sphère tend vers $-4\pi\underline{\psi}(P)$ lorsque son rayon tend vers zéro, ce qui donne la formule. La connaissance de $\underline{\psi}$ et de $\partial_n \underline{\psi}$ sur $\mathcal{S}$ détermine donc $\underline{\psi}$ partout à l'intérieur : c'est la version mathématique de l'idée de Huygens.

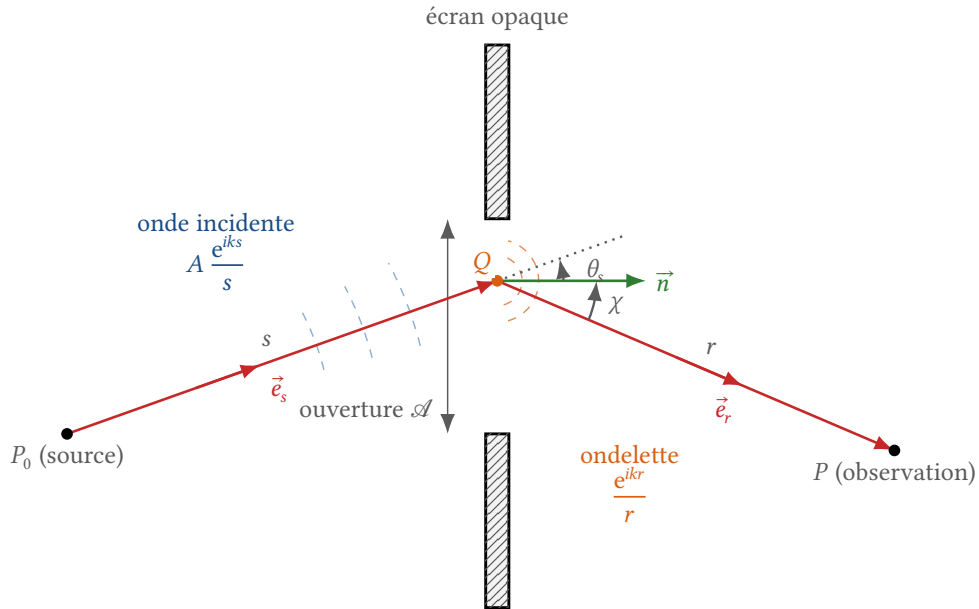


FIG. 1. Géométrie de la formule de Fresnel-Kirchhoff : source ponctuelle P_0 , ouverture $\mathcal{A}$ percée dans un écran opaque, point d'observation P . Le point courant Q de l'ouverture reçoit l'onde incidente $A e^{iks}/s$ et rayonne une ondelette e^{ikr}/r .

Appliquons le théorème à la situation de la figure 1. La surface $\mathcal{S}$ est constituée de l'ouverture $\mathcal{A}$, de la face arrière de l'écran et d'une grande sphère centrée en P . Kirchhoff postule les **conditions aux limites** suivantes :

- sur l'ouverture, $\underline{\psi}$ et $\partial_n \underline{\psi}$ sont ceux de l'onde incidente $\underline{\psi}_{\text{inc}}(Q) = A e^{iks}/s$;
- sur l'écran, $\underline{\psi} = 0$ et $\partial_n \underline{\psi} = 0$;
- la contribution de la grande sphère s'annule (condition de rayonnement de Sommerfeld : l'onde y est sortante).

Théorème – Formule de Fresnel-Kirchhoff

Pour $ks \gg 1$ et $kr \gg 1$ (distances grandes devant λ),

$$\underline{\psi}(P) = -\frac{iA}{2\lambda} \iint_{\mathcal{A}} \frac{e^{ik(r+s)}}{rs} \left[\cos(\vec{n}, \vec{e}_s) + \cos(\vec{n}, \vec{e}_r) \right] dS$$

avec $\vec{e}_s$ le vecteur unitaire de P_0 vers Q , $\vec{e}_r$ celui de Q vers P et $\vec{n}$ la normale à l'écran orientée vers P .

Démonstration

Sur $\mathcal{A}$, $\partial_n(e^{iks_p}/s_p)$ fait intervenir la dérivée de la distance QP : $\partial_n(QP) = -\vec{e}_r \cdot \vec{n} = -\cos \chi$; de même $\partial_n(P_0Q) = \vec{e}_s \cdot \vec{n} = \cos \theta_s$. En ne gardant que les termes dominants ($ik \gg 1/r, 1/s$) :

$$\underline{\psi}(P) \simeq \frac{1}{4\pi} \iint_{\mathcal{A}} \left[\frac{Ae^{iks}}{s} ik \frac{e^{ikr}}{r} (-\cos \chi) - \frac{e^{ikr}}{r} ik \frac{Ae^{iks}}{s} \cos \theta_s \right] dS = -\frac{ikA}{4\pi} \iint_{\mathcal{A}} \frac{e^{ik(r+s)}}{rs} (\cos \theta_s + \cos \chi) dS,$$

et $k/4\pi = 1/(2\lambda)$. Born et Wolf écrivent $[\cos(n, r) - \cos(n, s)]$ avec un vecteur s orienté de Q vers la source P_0 (d'où $\cos(n, s) = -1$ en incidence normale) : c'est la même formule.

Attention — Deux erreurs classiques

Le dénominateur est le *produit* rs (deux ondes sphériques se multiplient), non la somme $r + s$. Le crochet doit valoir 2 dans la direction de propagation directe ($\theta_s = \chi = 0$) : une écriture qui s'y annule est fautive.

Si la source est éloignée et en incidence normale ($\theta_s = 0, s \simeq s_0$ sur toute l'ouverture), l'amplitude incidente $\underline{\psi}_{\text{inc}} = Ae^{iks_0}/s_0$ est uniforme et

$$\underline{\psi}(P) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\mathcal{A}} \underline{\psi}_{\text{inc}}(Q) \frac{e^{ikr}}{r} K(\chi) dS, \quad K(\chi) = \frac{1 + \cos \chi}{2}$$

C'est exactement le **principe de Huygens-Fresnel** : chaque élément dS de l'ouverture rayonne une ondelette sphérique d'amplitude proportionnelle à l'amplitude incidente et à dS , avec le *facteur d'obliquité* $K(\chi)$ (maximal vers l'avant, nul vers l'arrière) et le préfacteur $1/(i\lambda)$ (avance de phase d'un quart de période et amplitude en $1/\lambda$), deux ingrédients que Fresnel avait dû postuler.

Remarque (limites de la formule). Les conditions aux limites de Kirchhoff sont mathématiquement sur-déterminées (imposer à la fois ψ et $\partial_n \psi$ nuls sur l'écran force $\psi \equiv 0$). Les formules de Rayleigh-Sommerfeld corrigent ce défaut sans changer les résultats dans le domaine utile (ouverture $\gg \lambda$, observation loin des bords). Pour des ouvertures polygonales compliquées, la transformation de Maggi-Rubinowicz ramène l'intégrale de surface à une intégrale de contour.

Pour une ouverture munie d'un objet transparent (lame, filtre, réseau), on introduit la **transmittance** complexe $\underline{t}(Q)$, rapport de l'amplitude juste après l'écran à l'amplitude incidente : $\underline{t} = 1$ dans une ouverture, 0 sur l'écran, $|\underline{t}| e^{i\varphi}$ en général. L'intégrale porte alors sur $\underline{t}(Q) \underline{\psi}_{\text{inc}}(Q)$.

3 Approximation paraxiale et approximation de Fresnel

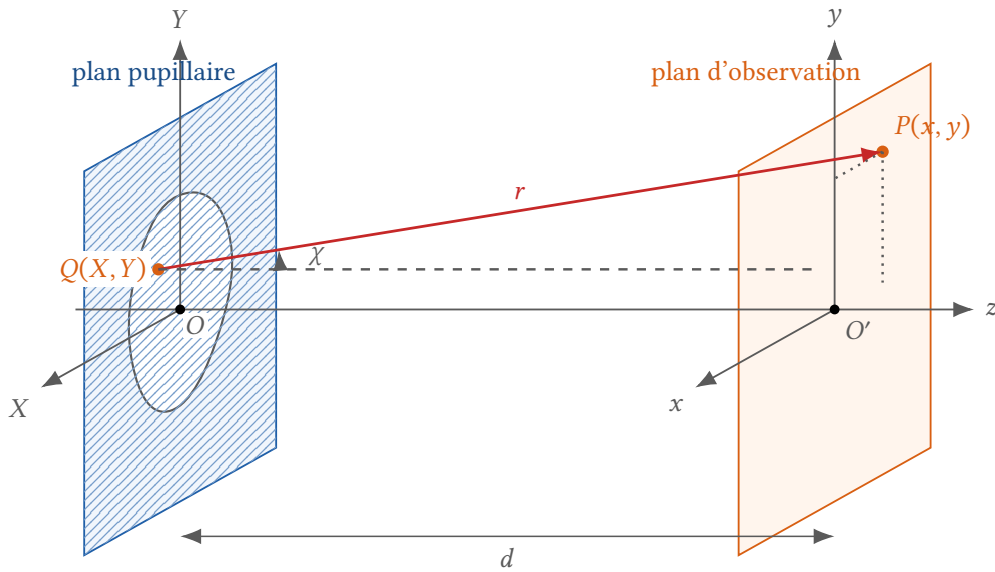


FIG. 2. Notations : plan pupillaire (X, Y) contenant l'ouverture, plan d'observation (x, y) à la distance d , point $Q(X, Y)$ de l'ouverture, point $P(x, y)$ de l'écran, $r = QP$.

Avec les notations de la figure 2, $r = \sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + d^2}$ et $\cos \chi = d/r$. Le terme e^{ikr} oscille extrêmement vite : les contributions dominantes viennent des points où la phase est stationnaire, au voisinage desquels le reste de l'intégrande varie peu. On traite donc séparément l'amplitude et la phase.

Amplitude (approximation paraxiale). Si les dimensions transverses sont petites devant d , c'est-à-dire si $\varepsilon = [(x - X)^2 + (y - Y)^2]/d^2 \ll 1$, alors $1/r \approx 1/d$ et $K(\chi) \approx 1$.

Phase (approximation de Fresnel). L'exponentielle est sensible à des variations de r de l'ordre de λ : on développe

$$r = d\sqrt{1 + \varepsilon} = d + \frac{(x - X)^2 + (y - Y)^2}{2d} - \frac{[(x - X)^2 + (y - Y)^2]^2}{8d^3} + \dots, \quad \varepsilon = \frac{(x - X)^2 + (y - Y)^2}{d^2}.$$

Ordres de grandeur – conditions usuelles

Ouverture $\ell = 1$ mm, $d = 20$ cm, $\lambda = 500$ nm. La figure s'étend sur $x \sim \lambda d/\ell = 0,1$ mm ; avec $|x - X| \lesssim 1$ mm : $\varepsilon \lesssim 2,5 \times 10^{-5}$ (amplitude : paraxial justifié) ; terme quadratique de phase $k \frac{(x - X)^2}{2d} \sim \frac{\pi \times 10^{-6}}{5 \times 10^{-7} \times 0,2} \sim 30$ rad : *non négligeable* ; terme quartique $k \frac{(x - X)^4}{8d^3} \sim 2 \times 10^{-4}$ rad : négligeable.

À retenir – Intégrale de diffraction de Fresnel

$$\underline{\psi}(x, y) = \frac{e^{ikd}}{i\lambda d} \iint \underline{t}(X, Y) \underline{\psi}_{\text{inc}}(X, Y) \exp\left\{ik \frac{(x - X)^2 + (y - Y)^2}{2d}\right\} dX dY.$$

Le champ diffracté est la *convolution* du champ dans l'ouverture par le noyau de Fresnel $e^{ik\rho^2/2d}$: c'est la propagation paraxiale sur la distance d .

4 Approximation de Fraunhofer et nombre de Fresnel

Développons la phase : $\frac{(x - X)^2}{2d} = \frac{x^2}{2d} - \frac{xX}{d} + \frac{X^2}{2d}$. Le terme $k(X^2 + Y^2)/2d$ est la *courbure* de l'ondelette sur l'étendue de l'ouverture. Si l'on peut le négliger, l'intégrale ne contient plus que des termes *linéaires* en X

et Y :

À retenir – Diffraction de Fraunhofer

Pour une ouverture de demi-dimension a , lorsque

$$N_F = \frac{a^2}{\lambda d} \ll 1 \quad (\text{nombre de Fresnel}),$$

$$\underline{\psi}(x, y) = \underbrace{\frac{\psi_{\text{inc}} e^{ikd}}{i\lambda d}}_{\underline{\psi}_0(x, y)} e^{ik\frac{x^2+y^2}{2d}} \iint \underline{t}(X, Y) \exp[-2i\pi(uX + vY)] dX dY, \quad u = \frac{x}{\lambda d}, \quad v = \frac{y}{\lambda d}.$$

La phase quadratique $e^{ik(x^2+y^2)/2d}$ ne dépend pas de l'ouverture et disparaît dans l'intensité : $I(x, y) = |\underline{\psi}_0|^2 |\underline{t}(u, v)|^2$.

Ordres de grandeur – distance de Fraunhofer

Le terme négligé vaut au plus $\pi a^2/(\lambda d) = \pi N_F$. Exiger $\pi N_F < \varepsilon = 10^{-3}$ rad pour $2a = 0,1$ mm et $\lambda = 0,5$ μm impose $d > \pi a^2/(\lambda \varepsilon) \approx 16$ m; exiger seulement $N_F \leq 0,1$ (figure déjà très proche de Fraunhofer, voir figure 3) donne $d \gtrsim 10 a^2/\lambda = 5$ cm. Pour une fente de 1 mm il faudrait $d \gtrsim 5$ m : en pratique on utilise une lentille.

Remarque (interprétation angulaire). Pour P à l'infini dans la direction (θ_x, θ_y) , la différence de marche entre les ondelettes issues de Q et de O vaut $-(X \sin \theta_x + Y \sin \theta_y)$: l'amplitude diffractée est $\propto \iint \underline{t} e^{-ik(X \sin \theta_x + Y \sin \theta_y)} dX dY$, soit la même formule avec $u = \sin \theta_x/\lambda$, $v = \sin \theta_y/\lambda$. C'est la forme la plus générale (elle n'est pas limitée aux petits angles) : **Fraunhofer = diffraction à l'infini**, et u, v sont des *fréquences spatiales* (inverses de longueurs).

5 Réalisation pratique : le montage à deux lentilles

Propriété

Une source ponctuelle au foyer objet de (L_1) éclaire la pupille en onde plane (ψ_{inc} uniforme); une lentille (L_2) conjugue la direction θ avec le point $x = f'_2 \tan \theta$ de son plan focal image. La figure de Fraunhofer s'observe donc dans le plan focal image de (L_2) avec

$$u = \frac{\sin \theta_x}{\lambda} \simeq \frac{x}{\lambda f'_2}, \quad v \simeq \frac{y}{\lambda f'_2},$$

quelle que soit la position de la pupille entre les deux lentilles (tant que le faisceau n'est pas vignetté), et quelle que soit la distance entre les lentilles.

Plus généralement, **la figure de diffraction de la pupille se forme autour de l'image géométrique de la source**, quelle que soit la conjugaison utilisée : la diffraction à l'infini intervient inévitablement dans la formation des images par tout système optique, car tout instrument possède une pupille limitée. C'est ce qui fixe le pouvoir de résolution (partie III).

Expérience – Montage de Fraunhofer sur banc d'optique

Laser He-Ne ($\lambda = 632,8$ nm), ou lampe à vapeur de sodium avec fente source fine et filtre; condenseur et fente source au foyer de (L_1) ($f'_1 \approx 20$ cm); pupille; (L_2) de grande focale ($f'_2 = 0,5$ à 1 m pour agrandir la figure); écran ou caméra au foyer de (L_2) . Avec un laser, dont le faisceau est déjà quasi plan et très cohérent, on peut supprimer (L_1) et même (L_2) si $d \gg a^2/\lambda$ (fentes fines).

Fente de largeur $2a$: de l'ombre géométrique ($N_F \gg 1$) à la figure de Fraunhofer ($N_F \ll 1$)

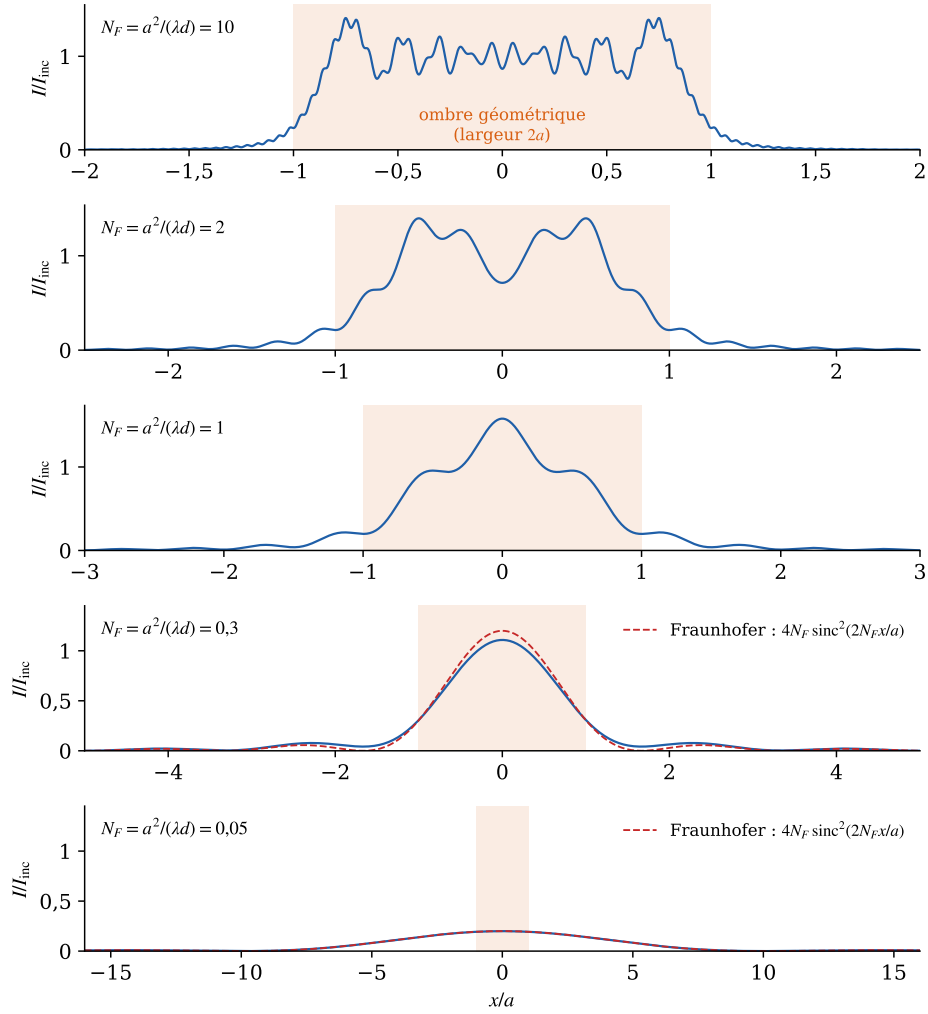


FIG. 3. Éclairement derrière une fente de largeur $2a$ calculé avec l'intégrale de Fresnel exacte (intégrales de Fresnel C et S) pour des nombres de Fresnel décroissants. Pour $N_F \gg 1$ on retrouve l'ombre géométrique bordée de franges ; pour $N_F \ll 1$ la figure de Fraunhofer en sinc^2 est atteinte (tirets rouges).

6 Lien avec la transformée de Fourier

Définition – Transformée de Fourier bidimensionnelle

$\hat{t}(u, v) = \text{TF}[\underline{t}](u, v) = \iint \underline{t}(X, Y) e^{-2i\pi(uX + vY)} dX dY$. Le résultat précédent s'écrit

$$\underline{\psi}(u, v) = \underline{\psi}_0 \hat{t}(u, v), \quad I(u, v) = |\underline{\psi}_0|^2 |\hat{t}(u, v)|^2$$

L'amplitude diffractée à l'infini est la transformée de Fourier de la transmittance de la pupille, évaluée aux fréquences spatiales $u = x/\lambda f'$, $v = y/\lambda f'$.

Les propriétés de la transformée de Fourier se traduisent immédiatement en propriétés des figures de diffraction :

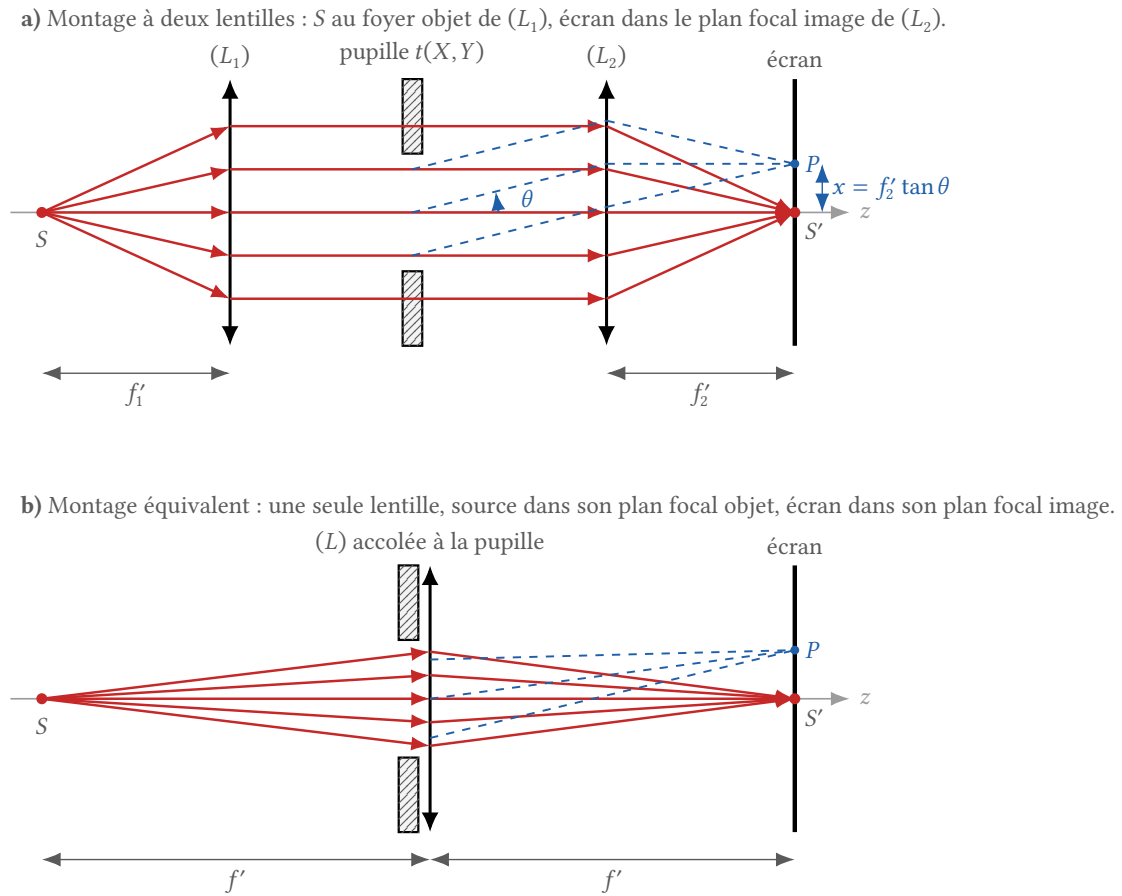


FIG. 4. Montage de Fraunhofer. a) La lentille (L_1) rend l'onde plane ; (L_2) ramène l'infini dans son plan focal image : la direction θ est observée au point $x = f'_2 \tan \theta$. b) Les deux lentilles et la pupille peuvent être accolées : le montage équivalent n'utilise qu'une lentille, source au foyer objet, écran au foyer image.

Propriété	Transformée de Fourier	Conséquence optique
Linéarité	$\text{TF}[\underline{t}_1 + \underline{t}_2] = \hat{\underline{t}}_1 + \hat{\underline{t}}_2$	Les <i>amplitudes</i> de deux pupilles s'ajoutent (interférences)
Translation	$\text{TF}[\underline{t}(X - X_0)] = e^{-2i\pi u X_0} \hat{\underline{t}}$	Déplacer la pupille ne change pas l'intensité : la figure reste centrée sur l'image géométrique de la source
Dilatation	$\text{TF}[\underline{t}(X/\alpha)] = \alpha \hat{\underline{t}}(\alpha u)$	Plus la pupille est petite, plus la figure est étendue (dans la direction où la pupille est étroite)
Parseval	$\iint \hat{\underline{t}} ^2 = \iint \underline{t} ^2$	Conservation de l'énergie
$\underline{t}$ réelle	$\hat{\underline{t}}(-u, -v) = \hat{\underline{t}}(u, v)^*$	Figure centrosymétrique : $I(-u, -v) = I(u, v)$
Babinet	$\underline{t} + \underline{t}_c = 1 \Rightarrow \hat{\underline{t}}_c = \delta - \hat{\underline{t}}$	Deux écrans complémentaires donnent la même figure hors de l'image géométrique
Convolution	$\text{TF}[\underline{t}_1 * \underline{t}_2] = \hat{\underline{t}}_1 \hat{\underline{t}}_2$	Réseau = motif * peigne : « diffraction × interférences »

Nous disposons d'un outil puissant : calculer une figure de diffraction, c'est calculer une transformée de Fourier. Appliquons-le aux pupilles les plus courantes.

II Figures de diffraction d'ouvertures simples

1 Ouverture rectangulaire et fente fine

Soit une ouverture rectangulaire de largeur b (selon X) et de hauteur h (selon Y), éclairée en onde plane : $t(X, Y) = \text{rect}(X/b) \text{rect}(Y/h)$, où rect vaut 1 sur $[-1/2, 1/2]$ et 0 ailleurs.

Démonstration — Transformée de Fourier de la fonction porte

$$\int_{-b/2}^{b/2} e^{-2i\pi u X} dX = \frac{e^{-i\pi u b} - e^{i\pi u b}}{-2i\pi u} = \frac{\sin(\pi u b)}{\pi u} = b \text{sinc}(ub), \quad \text{sinc}(x) \equiv \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, \quad \text{sinc}(0) = 1.$$

Par séparation des variables, $\hat{t}(u, v) = bh \text{sinc}(ub) \text{sinc}(vh)$.

À retenir — Ouverture rectangulaire

$$I(u, v) = I_0 \text{sinc}^2(ub) \text{sinc}^2(vh), \quad I_0 = |\psi_0|^2 (bh)^2, \quad u = \frac{\sin \theta_x}{\lambda} \simeq \frac{x}{\lambda f'}$$

Attention — Deux définitions de sinc

On utilise ici le sinus cardinal *normalisé* $\text{sinc}(x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$, dont les zéros sont les entiers non nuls. Beaucoup d'ouvrages écrivent $I = I_0 \text{sinc}^2(\pi b \sin \theta / \lambda)$ avec $\text{sinc}(x) = \sin x / x$: les deux écritures sont identiques, il faut seulement rester cohérent.

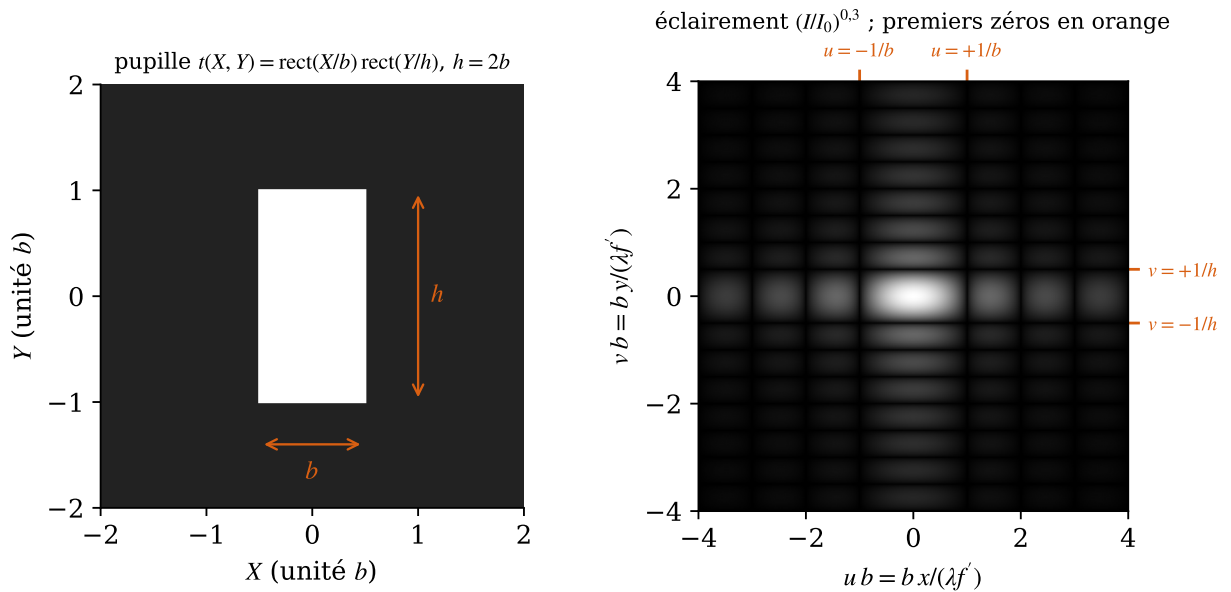


FIG. 5. Ouverture rectangulaire ($h = 2b$) et son éclairement de Fraunhofer, représenté avec une échelle non linéaire $(I/I_0)^{0.3}$ pour rendre visibles les lobes secondaires. La figure s'étend davantage dans la direction où la pupille est étroite.

Fente fine. Lorsque $h \gg b$, $\text{sinc}^2(vh)$ est une fonction extrêmement étroite de v (elle tend vers $\delta(v)/h$ quand $h \rightarrow \infty$) : toute la lumière se concentre sur la droite $v = 0$, perpendiculaire à la fente, avec le profil

$$I(u) = I_0 \text{sinc}^2(ub), \quad \sin \theta_p = p \frac{\lambda}{b} \text{ (annulations, } p = \pm 1, \pm 2, \dots \text{)}$$

L'intensité $I_0 \propto (bh)^2$ croît comme le carré de l'aire alors que l'étendue de la figure décroît comme $1/(bh)$: l'énergie totale $\iint I \, du \, dv = |\psi_0|^2 bh$ est bien proportionnelle à l'aire (théorème de Parseval). Une fente « infinie » n'a pas de sens physique : c'est la limite où la figure n'a plus d'extension selon v .

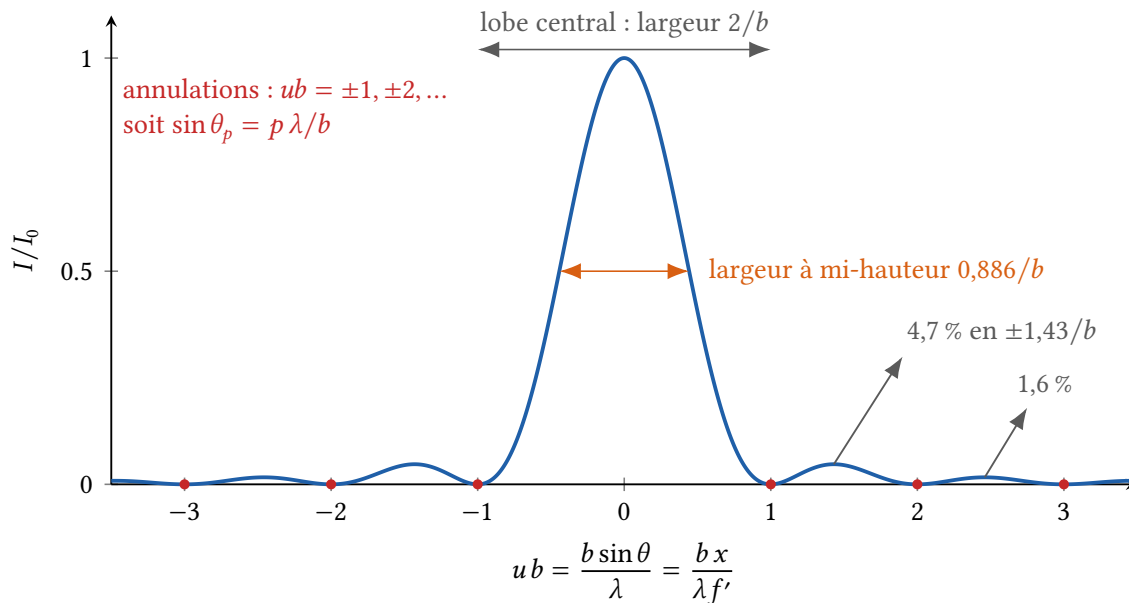


FIG. 6. Profil $\text{sinc}^2(ub)$ d'une fente de largeur b : lobe central de largeur $2/b$ en fréquence spatiale (soit $2\lambda/b$ en $\sin \theta$ et $2\lambda f'/b$ sur l'écran), annulations aux entiers, maxima secondaires de hauteurs rapidement décroissantes.

Propriété — Profil sinc^2

- Annulations en $ub = \pm 1, \pm 2, \dots$; lobe central de largeur $2/b$, lobes secondaires de largeur $1/b$.
- Largeur totale à mi-hauteur du lobe central : $0,886/b$.
- Maxima secondaires (solutions de $\tan \pi x = \pi x$) en $ub \simeq \pm 1,43, \pm 2,46, \pm 3,47$, de hauteurs relatives 4,7 %, 1,6 %, 0,83 %.
- Le lobe central contient 90,3 % de l'énergie.
- Plus la fente est fine, plus la figure est large : $\Delta\theta \simeq 2\lambda/b$. Pour $b \rightarrow \infty$ on retrouve l'optique géométrique (image ponctuelle de la source).

Ordres de grandeur

Laser He-Ne ($\lambda = 632,8 \text{ nm}$), fente $b = 100 \mu\text{m}$: $\sin \theta_1 = 6,3 \times 10^{-3}$, soit $\theta_1 = 0,36^\circ$; à $d = 2,00 \text{ m}$, $x_1 = \lambda d / b = 12,7 \text{ mm}$ et le lobe central mesure 25 mm. Condition de Fraunhofer : $N_F = (b/2)^2 / (\lambda d) = 2 \times 10^{-3} \ll 1$. En lumière blanche, chaque longueur d'onde donne sa propre figure, homothétique en λ : la tache centrale est blanche, les bords des lobes sont irisés (rouge à l'extérieur).

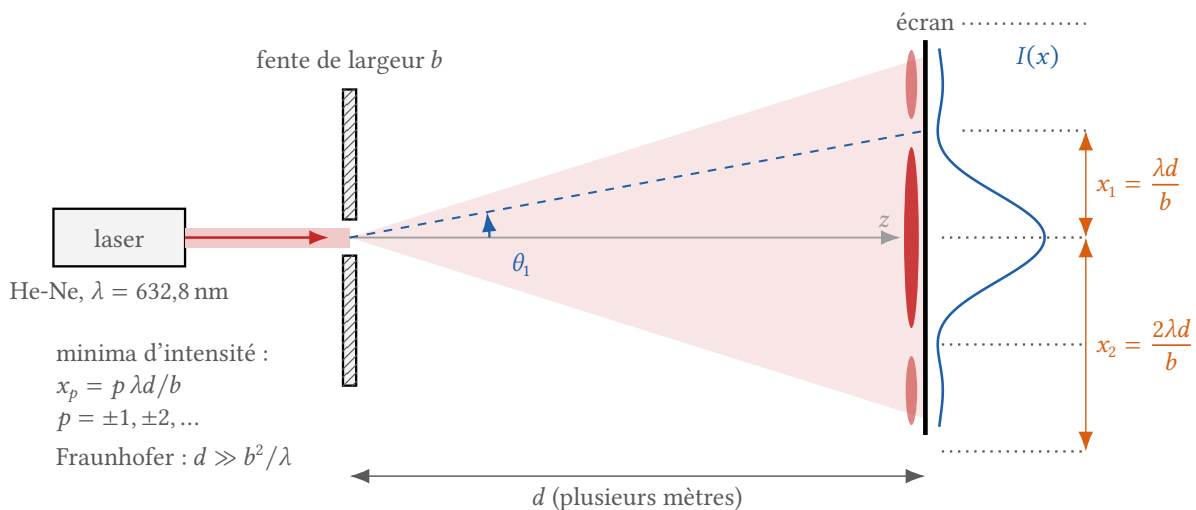


Fig. 7. Mesure de la largeur d'une fente par diffraction : on repère les minima d'intensité $x_p = p\lambda d/b$ sur un écran éloigné.

Expérience — Mesure de la largeur d'une fente

Matériel : laser He-Ne, fente calibrée (ou fente réglable), écran gradué ou caméra CCD sans objectif, mètre ruban. **Protocole** : placer l'écran à $d = 2,00 \text{ m}$ (mesuré à $\pm 1 \text{ cm}$) ; repérer sur l'écran les positions des minima d'ordre $p = \pm 1$ à ± 4 ($\pm 0,5 \text{ mm}$) ; tracer x_p en fonction de p : la pente vaut $\lambda d/b$. **Exemple de résultats** (valeurs typiques pour une fente nominale de $100 \mu\text{m}$; x_p est la moyenne des positions des ordres $+p$ et $-p$) :

p	1	2	3	4
$x_p \text{ (mm)}$	12,6	25,3	38,1	50,7

Pente de la régression : $12,67 \pm 0,08 \text{ mm}$, d'où $b = \lambda d / \text{pente} = 99,9 \mu\text{m}$. Incertitude relative : $\sqrt{(0,08/12,67)^2 + (0,01/2,00)^2} \simeq 0,8 \%$, soit $b = (100,0 \pm 0,8) \mu\text{m}$. On comparera à une mesure directe au microscope ou au comparateur. Avec une caméra, on ajuste directement le profil par $I_0 \text{sinc}^2(b(x - x_0)/\lambda d) + I_{\text{fond}}$: la méthode utilise toute la courbe et non les seuls zéros. **Pièges** : saturation du capteur (le lobe central est 20 fois plus intense que le premier lobe secondaire) ; lumière parasite ; vérifier $d \gg b^2/\lambda = 1,6 \text{ cm}$.

Point agrégation — Diffraction ou interférences ?

Il s'agit du même phénomène, la superposition d'ondes cohérentes ; on parle de *diffraction* lorsque les sources secondaires sont en nombre infini (continuum de l'ouverture) et d'*interférences* pour un nombre fini de sources. Feynman note qu'aucune distinction satisfaisante n'a jamais été donnée. Le réseau illustre l'imbrication des deux vocabulaires.

2 Réseau de N fentes

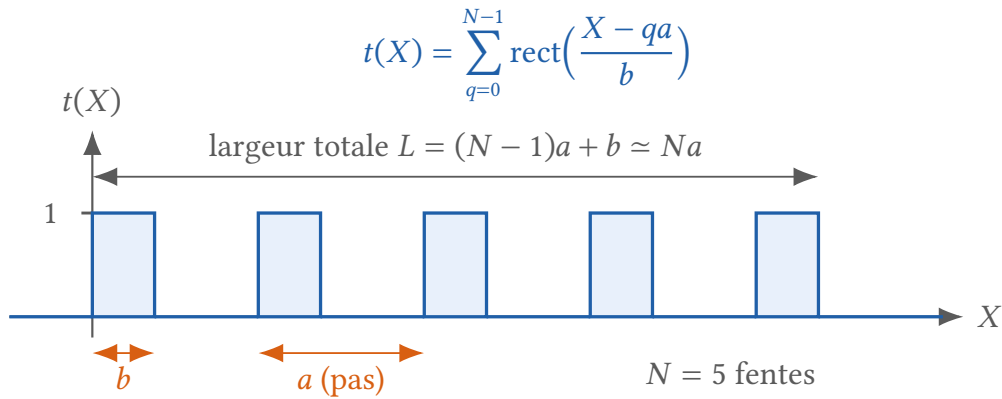


FIG. 8. Transmittance d'un réseau de N fentes de largeur b et de pas a .

La transmittance est une *convolution* du motif $\text{rect}(X/b)$ par un peigne de N impulsions :

$$t(X) = \text{rect}\left(\frac{X}{b}\right) * \sum_{q=0}^{N-1} \delta(X - qa).$$

Le théorème de convolution et le théorème de translation donnent

$$\hat{t}(u) = b \text{sinc}(ub) \sum_{q=0}^{N-1} e^{-2i\pi qua} = b \text{sinc}(ub) \frac{1 - e^{-2i\pi Nua}}{1 - e^{-2i\pi ua}} = b \text{sinc}(ub) e^{-i\pi(N-1)ua} \frac{\sin(N\pi ua)}{\sin(\pi ua)}.$$

À retenir — Réseau de N fentes

$$I(u) = N^2 I_1 \underbrace{\text{sinc}^2(ub)}_{\text{diffraction (facteur de forme)}} \underbrace{\left[\frac{\sin(N\pi ua)}{N \sin(\pi ua)} \right]^2}_{\text{interférences (fonction réseau)}}, \quad I_1 = |\psi_0|^2 b^2$$

I_1 est l'intensité au centre produite par une seule fente ; le maximum du réseau vaut $N^2 I_1$.

Propriété — Fonction réseau

- **Maxima principaux** en $ua = p$ entier : $\boxed{\sin \theta_p = p \lambda / a}$ (ordre p), de hauteur $N^2 I_1 \text{sinc}^2(pb/a)$; l'ordre p est *manquant* si pb/a est entier (par exemple les ordres pairs si $b = a/2$).
- **Annulations** en $ua = p \pm m/N$ ($m = 1, \dots, N-1$) : demi-largeur d'un ordre (du maximum à la première annulation) $\Delta(\sin \theta) = \lambda/(Na)$, d'autant plus fine que le réseau est large.
- $N-2$ maxima secondaires entre deux ordres, de hauteur relative $\approx 4,7\%$ au plus (comme le premier lobe secondaire du sinc^2) (négligeables pour N grand).
- Incidence oblique θ_i : l'onde incidente apporte une phase linéaire $e^{ikX \sin \theta_i}$ qui *translate* la figure en fréquence : $\boxed{\sin \theta_p - \sin \theta_i = p \lambda / a}$ (formule des réseaux).
- $N \rightarrow \infty$: la fonction réseau tend vers un peigne de Dirac ; chaque longueur d'onde est envoyée dans des directions discrètes, d'où l'usage spectroscopique.

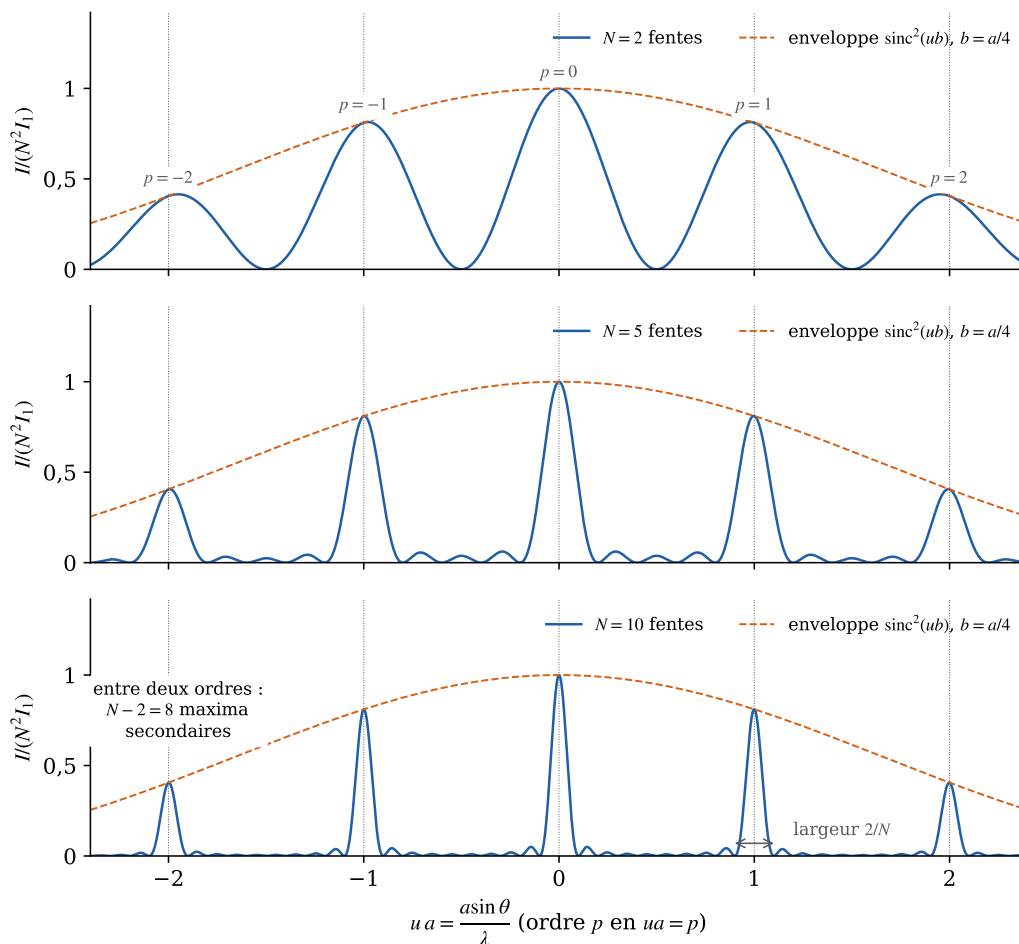


FIG. 9. Réseaux de $N = 2, 5$ et 10 fentes avec $b = a/4$. Les maxima principaux (ordres p) sont fixés par le pas a , leur hauteur par l'enveloppe de diffraction d'une fente, leur largeur par N .

Propriété – Dispersion et pouvoir de résolution

Dérivons la formule des réseaux à θ_i fixé : $\cos \theta_p d\theta_p = p d\lambda/a$, soit une **dispersion angulaire**

$$\frac{d\theta_p}{d\lambda} = \frac{p}{a \cos \theta_p}.$$

Deux longueurs d'onde λ et $\lambda + \delta\lambda$ sont séparées (critère de Rayleigh) si le maximum de l'une tombe sur la première annulation de l'autre : $p \delta\lambda/a \geq \lambda/(Na)$, d'où le **pouvoir de résolution**

$$\mathcal{R} = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = p N$$

qui ne dépend que de l'ordre et du nombre de traits éclairés.

Ordres de grandeur

Réseau de 600 traits/mm : $a = 1,67 \mu\text{m}$. Pour $\lambda = 633 \text{ nm}$ en incidence normale, $\sin \theta_1 = 0,38$ ($\theta_1 = 22,3^\circ$), $\theta_2 = 49,4^\circ$ et l'ordre 3 n'existe pas ($3 \times 0,38 > 1$). Largeur éclairée 20 mm : $N = 12\,000$, $\mathcal{R}_1 = 12\,000$, $\delta\lambda \approx 0,05 \text{ nm}$. Le doublet du sodium (589,0 et 589,6 nm, $\mathcal{R} \approx 10^3$) est séparé dès $N \approx 1000$ traits à l'ordre 1, soit 1,7 mm de réseau. Un CD (pistes espacées de $1,6 \mu\text{m}$) ou un DVD ($0,74 \mu\text{m}$) sont d'excellents réseaux par réflexion.

Expérience — Mesure d'une longueur d'onde au réseau

Lampe à vapeur de sodium ou de mercure, fente source, collimateur, réseau sur goniomètre, lunette auto-collimatrice. En incidence normale, on pointe les ordres $p = \pm 1, \pm 2$ de chaque raie : $\lambda = a \sin \theta_p / p$. Avec un réseau calibré, la précision est fixée par la lecture du goniomètre ($\pm 1'$ soit $\pm 3 \times 10^{-4}$ rad : $\delta\lambda/\lambda \approx 10^{-3}$ à l'ordre 1). Variante avec le laser : $\tan \theta_p = x_p/d$ sur un écran, ce qui permet au contraire de *mesurer le pas* a d'un réseau ou d'un CD. Observer qu'un réseau partiellement masqué donne des ordres plus larges : $\mathcal{R}$ diminue avec N .

3 Ouverture circulaire : la tache d'Airy

Les pupilles des instruments (objectifs, diaphragmes, œil) sont circulaires : c'est le cas le plus important. Pour une pupille de diamètre D , on utilise les coordonnées polaires $Q(\rho, \varphi)$ dans la pupille et $P(R, \theta)$ sur l'écran : $uX + vY = w\rho \cos(\varphi - \theta)$ avec $w = \sqrt{u^2 + v^2} = R/(\lambda f')$.

Démonstration — Calcul avec les fonctions de Bessel

$$\hat{t}(w) = \int_0^{D/2} \rho d\rho \int_0^{2\pi} e^{-2i\pi w\rho \cos(\varphi - \theta)} d\varphi = 2\pi \int_0^{D/2} J_0(2\pi w\rho) \rho d\rho,$$

grâce à la représentation intégrale $J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ix \cos \varphi} d\varphi$ (la phase θ disparaît par périodicité : la figure est de révolution). Avec $\frac{d}{dx}[xJ_1(x)] = xJ_0(x)$ et $x = 2\pi w\rho$:

$$\int_0^{D/2} J_0(2\pi w\rho) \rho d\rho = \frac{1}{(2\pi w)^2} [xJ_1(x)]_0^{\pi w D} = \frac{D}{4\pi w} J_1(\pi w D) \implies \hat{t}(w) = \frac{\pi D^2}{4} \left[\frac{2J_1(\pi w D)}{\pi w D} \right].$$

Le crochet vaut 1 en $w = 0$ ($J_1(x) \approx x/2$) : on retrouve l'aire de la pupille.

À retenir — Tache d'Airy

$$I(\zeta) = I_0 \left[\frac{2J_1(\pi\zeta)}{\pi\zeta} \right]^2, \quad \zeta = \frac{D \sin \theta}{\lambda} \approx \frac{DR}{\lambda f'}, \quad I_0 = |\psi_0|^2 \left(\frac{\pi D^2}{4} \right)^2$$

Premier anneau sombre en $\pi\zeta_1 = 3,8317$ (premier zéro de J_1), soit

$$\sin \theta_1 = 1,22 \frac{\lambda}{D}, \quad R_{\text{Airy}} = 1,22 \frac{\lambda f'}{D}$$

Propriété — La tache d'Airy en chiffres

Zéros de J_1 : 3,8317 ; 7,0156 ; 10,1735, soit $\zeta = 1,220$; 2,233 ; 3,238. Anneaux brillants de hauteurs relatives 1,75 % ; 0,42 % ; 0,16 %. Le disque central (*disque d'Airy*) contient 83,8 % de l'énergie, le premier anneau 7,2 %. Pour un instrument, la tache d'Airy est l'**image d'un point** : on l'appelle *réponse impulsionnelle* ou *fonction d'étalement du point* (PSF). L'optique géométrique, qui prévoit une image ponctuelle, ne peut pas la décrire.

Expérience — Tache d'Airy d'un trou calibré

Laser He-Ne et trou de diamètre $D = 100$ à $200 \mu\text{m}$ (« pinhole »), écran ou caméra à $d = 2 \text{ m}$. Pour $D = 150 \mu\text{m}$: $R_{\text{Airy}} = 1,22\lambda d/D = 10,3 \text{ mm}$, deuxième anneau sombre à 18,8 mm. Mesurer les rayons des anneaux sombres donne D ; le rapport $R_2/R_1 = 1,83$ est une vérification sans paramètre. Un trou trop petit ($D \lesssim 20 \mu\text{m}$) laisse passer trop peu de lumière ; un trou trop grand viole $N_F \ll 1$.

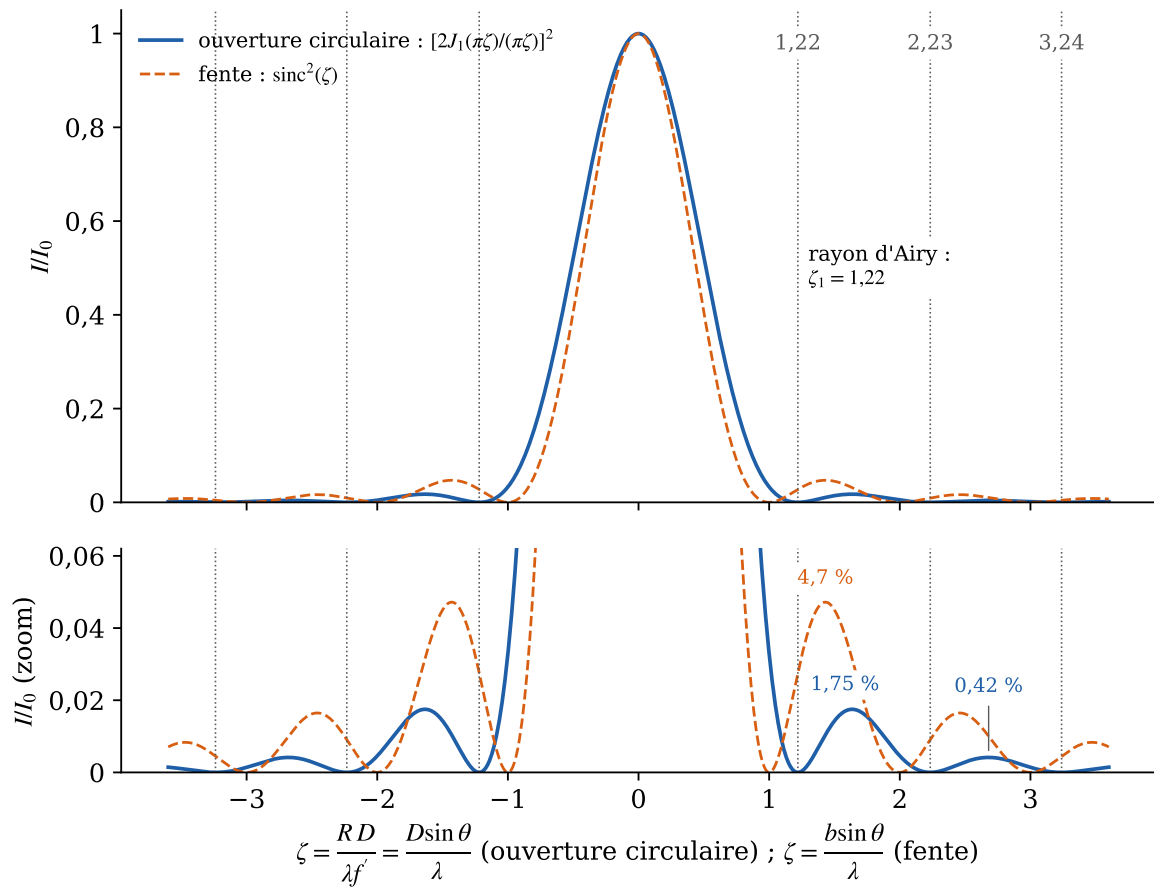


FIG. 10. Profil de la tache d'Airy comparé au sinc^2 d'une fente de largeur $b = D$. Zéros en $\zeta = 1,22; 2,23; 3,24$; les anneaux sont nettement moins intenses que les lobes secondaires de la fente.

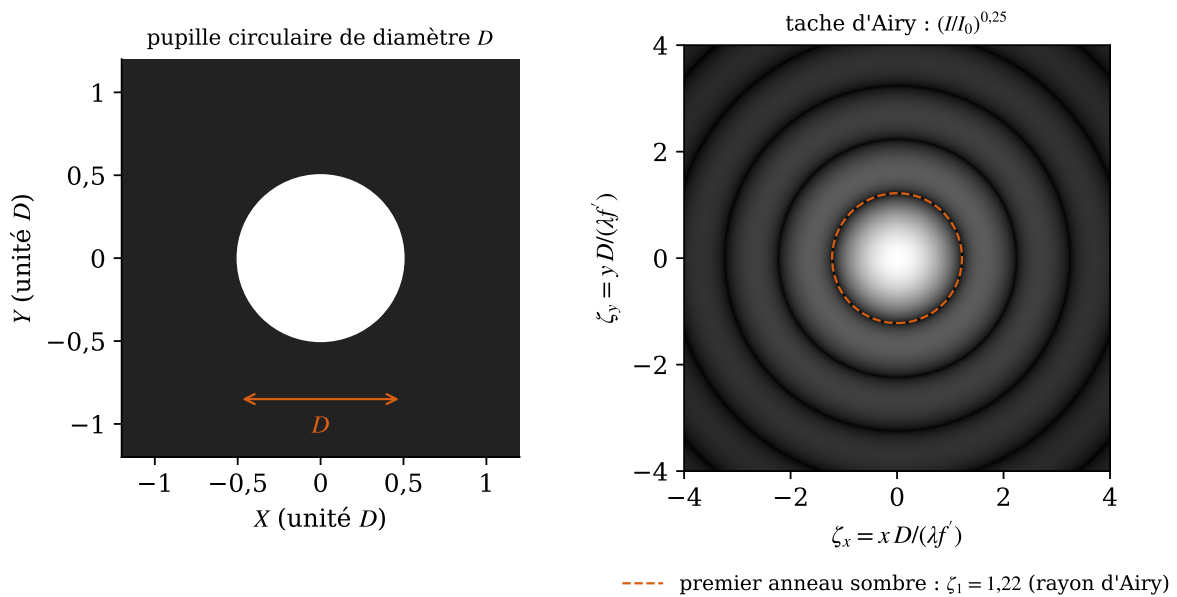


FIG. 11. Pupille circulaire et tache d'Airy (échelle $(I/I_0)^{0,25}$). Le disque central contient 83,8 % de l'énergie.

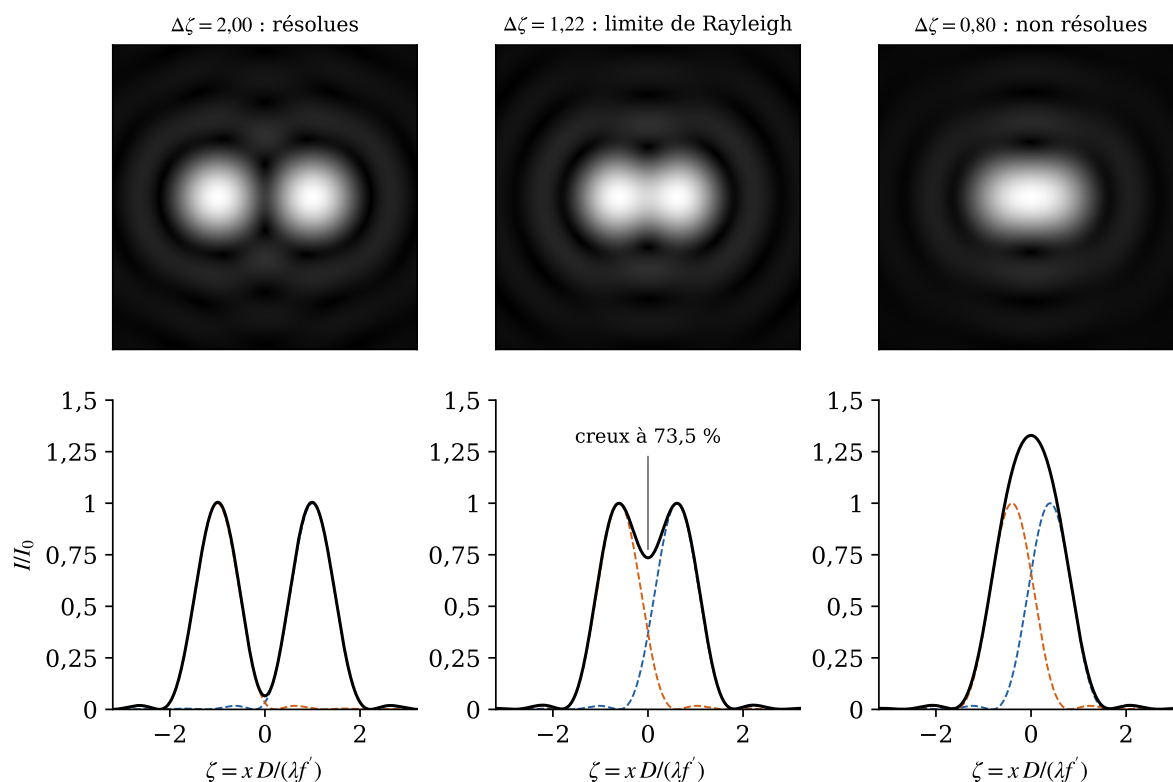


FIG. 12. Deux sources ponctuelles incohérentes de même intensité, pour trois écarts angulaires (en unités de λ/D). Haut : image (échelle $\sqrt{I}$); bas : profil selon la ligne des centres (tirets : chaque source; trait plein : somme).

Point agrégation – D'où vient le facteur 1,22 ?

C'est x_1/π où $x_1 = 3,8317$ est le premier zéro de J_1 . Il n'a rien de « magique » : pour la fente, le même raisonnement donne $x_1 = \pi$ et le facteur 1. La valeur plus grande traduit le fait qu'une pupille circulaire de diamètre D est en moyenne plus étroite qu'une fente de largeur D (ses cordes sont plus courtes), ce qui élargit la figure.

La tache d'Airy étant l'image d'un point, elle fixe la plus petite distance entre deux points que peut séparer un instrument : c'est le pouvoir de résolution.

III Applications

1 Pouvoir de résolution des instruments : critère de Rayleigh

Deux étoiles (sources *incohérentes* entre elles) vues par un télescope de diamètre D donnent deux taches d'Airy dont les *intensités* s'ajoutent. Si leur écart angulaire $\Delta\alpha$ est trop petit, les taches se recouvrent et l'on ne voit qu'une seule tache.

Définition – Critère de Rayleigh

Deux points sont dits *résolus* si le maximum de l'une des taches tombe au moins sur le premier zéro de l'autre :

$$\Delta\alpha \geq \Delta\alpha_{\min} = 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

À la limite, le creux entre les deux maxima vaut 73,5 % du maximum.

Point agrégation – Deux phares de voiture à 10 km

Écart 1,3 m à 10 km : $1,3 \times 10^{-4}$ rad, inférieur à 3×10^{-4} rad : l'œil ne les sépare pas (on voit une seule lumière). Un télescope de 60 mm ($1,1 \times 10^{-5}$ rad) les sépare largement. Augmenter le grossissement d'une lunette ne sert à rien au-delà du *grossissement résolvant* $G \approx D/2$ mm : on grossit la tache d'Airy.

Ordres de grandeur – Résolution angulaire $1,22 \lambda/D$ pour $\lambda = 550$ nm ($1'' = 4,85 \times 10^{-6}$ rad)

Instrument	D	$\Delta\alpha_{\min}$	Commentaire
Œil (pupille de jour)	2 mm	$3,4 \times 10^{-4}$ rad $\approx 1,2'$	Acuité $\approx 1'$: diffraction et pas des cônes (2,5 μ m, $f \approx 17$ mm) sont accordés
Télescope amateur	200 mm	0,69''	Limité par la turbulence (<i>seeing</i> 0,5 à 2'')
Hubble	2,4 m	0,058''	Hors atmosphère : limité par la diffraction
VLT (une unité)	8,2 m	0,017''	Atteint seulement avec optique adaptative
ELT	39 m	0,0035''	Première lumière prévue fin des années 2020

Microscope : critère d'Abbe-Rayleigh $d_{\min} = 0,61 \lambda / \text{ON}$ avec l'ouverture numérique $\text{ON} = n \sin \alpha$; pour $\text{ON} = 1,4$ (immersion), $d_{\min} \approx 240$ nm. Le microscope électronique ($\lambda \approx 2,5$ pm à 200 keV) n'est limité que par ses aberrations ($\sim 0,1$ nm). La microscopie de fluorescence « super-résolue » (STED, PALM ; prix Nobel de chimie 2014) contourne la limite d'Abbe en exploitant la photophysique des fluorophores, non en violant la diffraction.

Remarque. Le critère est conventionnel : Sparrow propose la disparition du creux ($0,95 \lambda/D$), et un détecteur à faible bruit permet, en ajustant un modèle de deux taches, de descendre en dessous. Mais le bruit de photons impose toujours une limite, et $1,22 \lambda/D$ reste l'ordre de grandeur de référence. Il suppose aussi une optique parfaite (sans aberrations) : on dit alors que l'instrument est *limité par la diffraction*.

2 Optique de Fourier : filtrage spatial

Dans le montage $4f'$ de la figure 13 (objet au foyer objet de (L_1)), le plan focal image de (L_1) est le **plan de Fourier** : l'amplitude y est $\hat{t}(u, v)$ et chaque point (u, v) représente une fréquence spatiale de l'objet, c'est-à-dire une composante sinusoïdale de période $1/\sqrt{u^2 + v^2}$ dans l'objet. Une seconde lentille (L_2) effectue une nouvelle transformée de Fourier : on obtient dans son plan focal $\hat{t}(-X, -Y)$, l'*image* (renversée) de l'objet. C'est l'analyse d'Abbe (1873) de la formation des images : **l'image est une double diffraction**.

Propriété – Filtrage des fréquences spatiales

Un masque de transmittance $m(u, v)$ placé dans le plan de Fourier multiplie le spectre : l'image devient $\text{TF}[\hat{t}m] = \hat{t} * \hat{m}$, *convolution* de l'objet par la réponse impulsionnelle $\hat{m}$ du filtre.

- **Passe-bas** (petit trou centré) : élimine les détails fins (*détramage* d'une photographie imprimée, lissage du faisceau d'un laser par un « filtre spatial » trou d'épingle).
- **Directionnel** (fente) : ne conserve que les structures périodiques dans une direction.
- **Cache central** (*strioscopie*, fond noir) : supprime l'ordre 0, c'est-à-dire le fond uniforme ; seules les variations (bords, défauts, gradients d'indice d'un écoulement) sont lumineuses sur fond noir.
- **Lame de phase** (contraste de phase) : voir ci-dessous.

Expérience – Expérience d'Abbe

Laser élargi et collimaté, grille (ou toile métallique, pas $\approx 0,1$ mm) au foyer objet de (L_1) ($f' = 20$ cm), masques dans le plan de Fourier (fente orientable, diaphragme à iris, point opaque sur lame de verre), (L_2), écran. Observer le spectre en grille, puis l'image filtrée pour chaque masque. On montre ainsi en

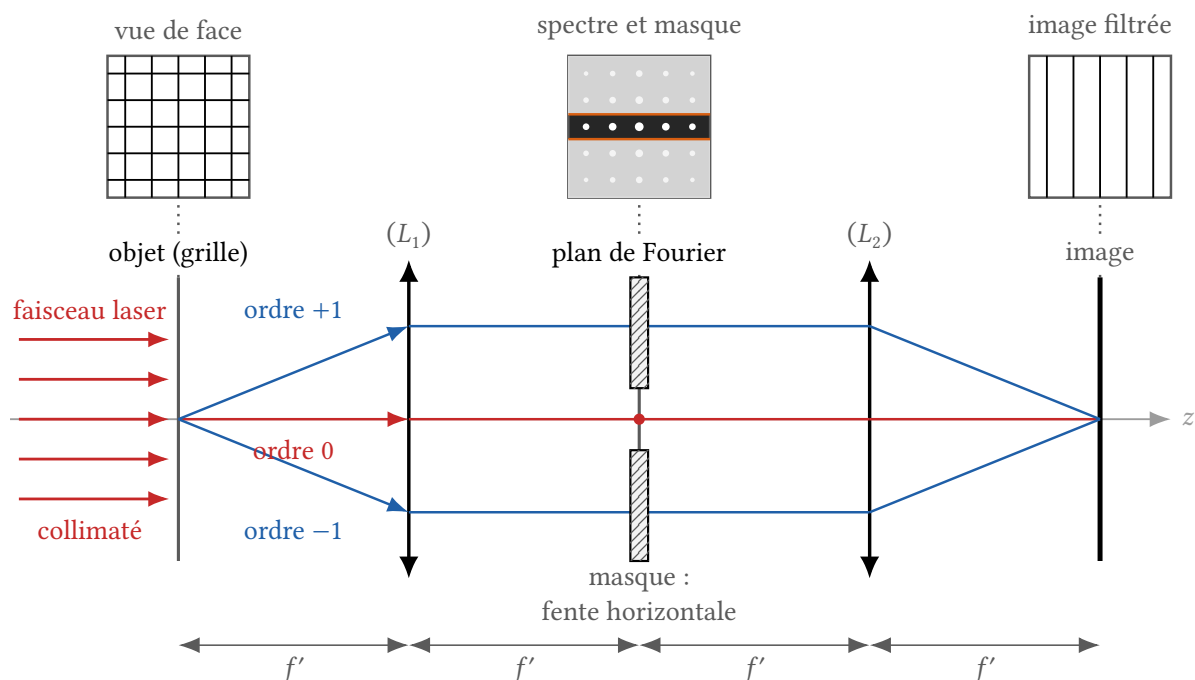


FIG. 13. Montage « $4f'$ » d'Abbe : l'objet (une grille) au foyer objet de (L_1), son spectre dans le plan focal commun, l'image au foyer image de (L_2). Un masque dans le plan de Fourier sélectionne les fréquences spatiales transmises : ici une fente horizontale ne garde que les ordres de la ligne $v = 0$, et l'image ne contient plus que des traits verticaux.

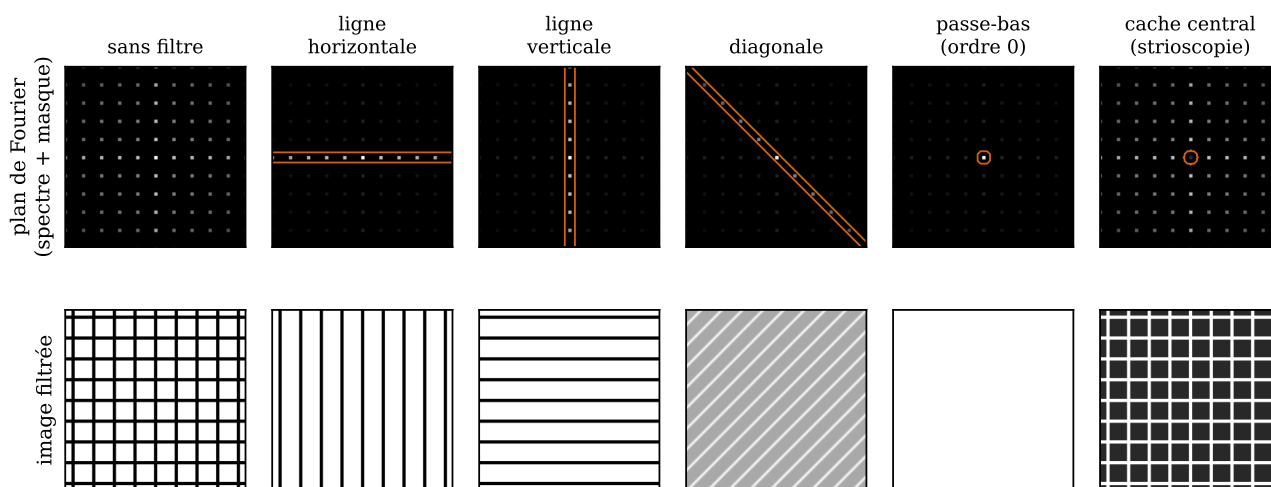


FIG. 14. Expérience d'Abbe simulée numériquement (transformée de Fourier discrète) : spectre d'une grille et images obtenues avec différents masques (contour orange). La ligne horizontale ne garde que les fréquences $v = 0$ et produit des traits verticaux ; la diagonale produit des franges de pas $a/\sqrt{2}$; l'ordre 0 seul donne un éclaircissement uniforme ; le cache central inverse le contraste.

direct que l'information sur les détails fins réside loin de l'axe dans le plan de Fourier, et qu'un objectif de petite ouverture (qui coupe les ordres élevés) ne peut pas résoudre un détail de période a si ses ordres ± 1 ($\sin \theta = \lambda/a$) ne passent pas : c'est la limite d'Abbe $a_{\min} = \lambda/\text{ON}$ en éclairage cohérent.

Démonstration — Contraste de phase de Zernike

Un objet transparent mince (cellule, lame de verre inhomogène) a une transmittance $\underline{t} = e^{i\varphi(X,Y)} \simeq 1 + i\varphi$ pour $\varphi \ll 1$. Son image directe a pour intensité $|1 + i\varphi|^2 \simeq 1$: *aucun contraste*. Le terme « 1 » est l'ordre 0 (fond), concentré au centre du plan de Fourier ; le terme $i\varphi$ est diffracté hors de l'axe. En plaçant au centre

du plan de Fourier une lame transparente d'épaisseur e telle que $(n - 1)e = \lambda/4$, l'ordre 0 est déphasé de $\pi/2$ (multiplié par i) :

$$t_{\text{image}} \simeq i + i\varphi = i(1 + \varphi) \implies I \simeq 1 + 2\varphi.$$

La variation de *phase* est convertie en variation d'*intensité*, linéaire en φ . Frits Zernike (1934) reçut le prix Nobel de physique 1953 pour cette idée, qui a révolutionné la microscopie des cellules vivantes non colorées.

3 Au-delà de Fraunhofer

- **Diffraction de Fresnel** ($N_F \gtrsim 1$) : franges au bord des ombres, point d'Arago au centre de l'ombre d'un disque, lentilles de Fresnel à zones.
- **Rayons X et cristaux** (Laue 1912, Bragg 1913) : le même formalisme (transformée de Fourier de la densité électronique, réseau réciproque) fonde la cristallographie ; l'ADN (1953) a été résolu ainsi.
- **Ondes de matière** : la diffraction des électrons par un cristal (Davisson et Germer, 1927) a confirmé l'hypothèse de de Broglie ; celle des neutrons et des atomes est aujourd'hui courante.
- **Antennes et acoustique** : la directivité d'une antenne ou d'un haut-parleur est la transformée de Fourier de la distribution de courant ou de vitesse sur l'ouverture.
- **Apodisation** : en modifiant t (pupille gaussienne, par exemple), on supprime les anneaux au prix d'un élargissement du lobe central ; la transformée de Fourier d'une gaussienne est une gaussienne, ce qui explique la propagation des faisceaux laser.
- **Speckle et holographie** (Gabor 1948, Nobel 1971) : enregistrement de la phase par interférences, reconstruction par diffraction.

Conclusion

L'optique géométrique est l'approximation d'ordre zéro en λ/a : les rayons se propagent en ligne droite et une pupille ne fait que découper le faisceau. La diffraction apparaît dès que l'on tient compte de la nature ondulatoire de la lumière : dans l'approximation de Fraunhofer, valable lorsque $N_F = a^2/\lambda d \ll 1$ ou dans le plan focal d'une lentille, **l'amplitude diffractée est la transformée de Fourier de la transmittance de la pupille**. Cette formulation donne d'un coup la fente (sinc^2), le réseau (produit interférences $\times$ diffraction, pouvoir de résolution pN), la pupille circulaire (tache d'Airy, $1,22 \lambda/D$), et elle explique pourquoi tout instrument a un pouvoir de résolution limité. Elle fonde aussi l'optique de Fourier : filtrer dans le plan focal, c'est traiter l'image, et c'est ainsi que Zernike a rendu visibles les cellules vivantes. Les mêmes idées s'appliquent aux rayons X, aux électrons, aux antennes, et se prolongent, quand N_F n'est plus petit, par la diffraction de Fresnel.

Bibliographie

- M. BORN, E. WOLF, *Principles of Optics*, 7^e éd., Cambridge University Press, 1999, chapitre 8 (théorie de Kirchhoff, Fraunhofer, Airy) : la référence pour les démonstrations.
- J. W. GOODMAN, *Introduction to Fourier Optics*, 4^e éd., W. H. Freeman, 2017, chapitres 3 à 5 (Rayleigh-Sommerfeld, Fresnel, Fraunhofer, optique de Fourier).
- E. HECHT, *Optique*, 4^e éd., Pearson, chap. 10 : présentation pédagogique, nombreuses photographies de figures de diffraction.
- J.-Ph. PÉREZ, *Optique, fondements et applications*, 7^e éd., Dunod, chap. « Diffraction de Fraunhofer » et « Filtrage spatial ».
- R. TAILLET, *Optique physique : propagation de la lumière*, De Boeck, 2015.
- Sextant, *Optique expérimentale*, Hermann, 1997 : montages de diffraction, filtrage, strioscopie.
- R. DUFFAIT, *Expériences d'optique à l'agrégation de sciences physiques*, Bréal.
- F. ZERNIKE, « How I discovered phase contrast », *Science* **121**, 345 (1955) ; G. KIRCHHOFF, *Ann. Phys.* **254**, 663 (1883) ; A. SOMMERFELD, *Math. Ann.* **47**, 317 (1896).

A Questions classiques du jury

Point agrégation – Où observe-t-on la figure de Fraunhofer sans lentille ?

À grande distance, $d \gg a^2/\lambda$ ($N_F \ll 1$). Plus généralement, la figure de diffraction de la pupille se forme *autour de l'image géométrique de la source* : avec une lentille, dans le plan conjugué de la source, qui est le plan focal si la source est à l'infini (ou au foyer objet d'une première lentille).

Point agrégation – Pourquoi les conditions aux limites de Kirchhoff sont-elles critiquées ?

Imposer simultanément $\underline{\psi} = 0$ et $\partial_n \underline{\psi} = 0$ sur l'écran est incompatible avec l'équation de Helmholtz (un théorème d'unicité impose alors $\underline{\psi} \equiv 0$). Les deux formules de Rayleigh-Sommerfeld, obtenues avec des fonctions de Green adaptées (image de P par rapport au plan de l'écran), n'imposent qu'une seule condition et sont cohérentes ; elles ne diffèrent de celle de Kirchhoff que par le facteur d'obliquité ($\cos \chi$ ou 1 au lieu de $(1 + \cos \chi)/2$), sans effet dans le domaine paraxial.

Point agrégation – Que devient la figure si la source est étendue ?

Chaque point de la source donne une figure centrée sur sa propre image géométrique ; ces figures s'ajoutent en intensité (source incohérente). L'image observée est la *convolution* de l'image géométrique de la source par la tache de diffraction : si la source est large devant $\lambda f'/b$, la figure est brouillée. C'est pourquoi on utilise une fente source *parallèle* à la fente diffractante : on peut l'élargir dans la direction où la figure n'a pas de structure.

Point agrégation – Et en lumière blanche ?

La figure est homothétique en λ : tache centrale blanche, bords irisés avec le rouge à l'extérieur ; pour un réseau, chaque ordre $p \neq 0$ est un spectre (le violet dévié le moins), et les ordres se recouvrent dès $p \geq 2$ ($2 \times 400 \text{ nm} < 1 \times 800 \text{ nm}$).

Point agrégation – Pourquoi l'intensité est-elle en sinc^2 et non en sinc ?

Les détecteurs (œil, capteur) sont sensibles à la moyenne temporelle du carré du champ : l'intensité est le module carré de l'amplitude complexe. Les lobes secondaires correspondent aux changements de signe de l'amplitude (déphasage de π d'un lobe au suivant), invisibles sur l'intensité mais observables par interférométrie.

Point agrégation – Diffraction par un cheveu : théorème de Babinet

Un fil opaque de diamètre b et une fente de même largeur ont des transmittances complémentaires ($t_{\text{fil}} = 1 - t_{\text{fente}}$) : hors de l'image géométrique de la source (ici le point central du faisceau laser), leurs figures sont identiques. On mesure ainsi le diamètre d'un cheveu (50 à 100 μm) avec un laser et un mètre.

Point agrégation – Que vaut le facteur d'obliquité et a-t-il une importance ?

$K(\chi) = (1 + \cos \chi)/2$ dans la théorie de Kirchhoff : il vaut 1 vers l'avant et 0 vers l'arrière, ce qui règle l'objection historique faite à Huygens (pourquoi pas d'onde « en retour » ?). En pratique, les angles de diffraction sont petits ($\lambda/a \ll 1$) et $K \simeq 1$.

Point agrégation – Pourquoi augmenter le diamètre d'un télescope ?

Pour collecter plus de lumière (flux $\propto D^2$) et pour améliorer la résolution ($\propto 1/D$), ce qui n'est effectif au sol qu'avec une optique adaptative corrigeant la turbulence. Le grossissement, lui, ne change pas la quantité d'information.

Point agrégation — Peut-on « battre » la limite de diffraction ?

Elle borne la *résolution d'une image formée en champ lointain*. On la contourne en champ proche (microscopie SNOM, ondes évanescentes), par la photophysique (STED, PALM : on localise des molécules isolées à mieux que λ/D car localiser un objet *unique* n'est pas le séparer d'un voisin), ou par la synthèse d'ouverture (interférométrie : D effectif = distance entre télescopes).

B Erreurs et imprécisions corrigées par rapport aux notes manuscrites

1. Formule de Fresnel-Kirchhoff : dénominateur rs (produit) et non $r + s$; crochet $[\cos(\vec{n}, \vec{e}_s) + \cos(\vec{n}, \vec{e}_r)]$ avec les vecteurs de la figure, et non $[\cos(n, s) - \cos(n, r)]$ qui s'annule vers l'avant.
2. Convention temporelle $e^{-i\omega t}$ annoncée mais noyau de Fresnel écrit avec le signe de la convention opposée; préfacteur de Fraunhofer incohérent avec le noyau. Une seule convention est maintenue ici, l'autre est signalée.
3. Préfacteur paraxial : $1/(i\lambda d)$ devant ψ_{inc} (un facteur 2 avait été perdu avec $A_0 = Ae^{iks_0}/2s_0$).
4. Ordre de grandeur « $\lambda d/\ell = 0,05 \text{ mm}$ » : la valeur correcte est $0,1 \text{ mm}$ (demi-largeur du lobe central) pour $\ell = 1 \text{ mm}$, $d = 20 \text{ cm}$, $\lambda = 500 \text{ nm}$.
5. Second zéro de la tache d'Airy : $\zeta_2 = 7,0156/\pi = 2,233$ et non $2,33$ (également corrigé dans le script Python d'origine).
6. Fonction d'Airy : $I_0[2J_1(\pi\zeta)/(\pi\zeta)]^2$; les notes écrivaient $2J_1(\xi)/(\pi\xi)$ et le fichier `difffrac.tex` omettait le carré.
7. Transmittance du réseau : $\text{rect}((X - qa)/b)$ et non $\text{rect}(X/b - qa)$ (homogénéité).
8. Fente infinie : le sinc se concentre en $v = 0$, non en « $v = 1$ ».
9. Largeur à mi-hauteur du lobe central : $0,886/b$ (et non « $0,85/b$ »); le mot « interfrange » est réservé aux interférences, on parle ici de l'écart $\lambda d/b$ entre annulations.
10. Intensité du réseau : I_0 désigne l'intensité d'une fente; le maximum vaut $N^2 I_0$.
11. Résolutions angulaires : valeurs recalculées avec le facteur $1,22$ ($\approx 1'$ pour l'œil et non $50''$).
12. Filtrage diagonal : les franges de l'image ont un pas $a/\sqrt{2}$ (l'écart des spots dans le plan de Fourier est, lui, multiplié par $\sqrt{2}$).

C Script : calcul de la tache d'Airy

Les figures de ce document sont produites par des scripts Python (dossier `figures/`); en voici l'essentiel pour la tache d'Airy. La fonction de Bessel J_1 est fournie par SciPy.

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from scipy.special import j1, jn_zeros
4
5 def airy(zeta):
6     """[2 J1(pi zeta)/(pi zeta)]^2, avec la limite 1 en zeta = 0."""
7     x = np.pi * np.asarray(zeta, dtype=float)
8     out = np.ones_like(x)
9     nz = np.abs(x) > 1e-12
10    out[nz] = (2 * j1(x[nz]) / x[nz]) ** 2
11    return out
12
13 print(jn_zeros(1, 3) / np.pi)      # zéros : 1.2197, 2.2331, 3.2383
14
15 z = np.linspace(-4, 4, 801)        # zeta = D sin(theta) / lambda
16 X, Y = np.meshgrid(z, z)
17 I = airy(np.hypot(X, Y))
18 plt.imshow(I ** 0.25, extent=[-4, 4, -4, 4], cmap="gray") # gamma pour voir les anneaux
19 plt.xlabel(r"$\zeta_x$"); plt.ylabel(r"$\zeta_y$"); plt.show()
```